정답표와 예상 등급컷

정답표

공통과목

1번 ③ / 2번 ③ / 3번 ④ / 4번 ⑤ / 5번 ④

6번 ① / 7번 ① / 8번 ⑤ / 9번 ② / 10번 ①

11번 ② / 12번 ② / 13번 ⑤ / 14번 ③ / 15번 ④

16번 64 / 17번 6 / 18번 2 / 19번 16 / 20번 94

21번 504 / 22번 10

확률과 통계

23번 ⑤ / 24번 ① / 25번 ③ / 26번 ② / 27번 ④

28번 ③ / 29번 11 / 30번 653

미적분

23번 ④ / 24번 ③ / 25번 ④ / 26번 ⑤ / 27번 ②

28번 ② / 29번 48 / 30번 60

기하

23번 ② / 24번 ④ / 25번 ② / 26번 ③ / 27번 ⑤

28번 ④ / 29번 22 / 30번 493

예상 등급컷

공통과목과 선택과목을 합한 100점 만점 원점수 기준입니다.

선택과목	1등급	2등급	3등급
확률과 통계	88점	80점	72점
미적분	84점	76점	68점
기하	86점	78점	70점

위 점수는 문항 구성과 예상 풀이 부담을 바탕으로 정한 제작자 예상치입니다. 실제 응시 결과에 따라 달라질 수 있습니다.

공통과목 해설

1번 | 정답 ③ | 2점

R1. 밑을 통일하여 지수 계산

조건

구할 식은 $27^{2/3} \times 3^{-1}$이고 $27 = 3^3$이다.

사용 과정

양수의 거듭제곱에서 지수끼리 곱하면 $27^{2/3} = (3^3)^{2/3} = 3^2$이다. 같은 밑의 곱에서는 지수를 더하므로 $3^2 \times 3^{-1} = 3^{2-1}$이다.

결과 · 다음 연결

구하는 값은 3이다.

2번 | 정답 ③ | 2점

R1. 도함수를 구하고 주어진 입력에 대입하기

조건

다항함수 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$에서 $x = 1$인 점의 미분계수를 구한다.

사용 과정

각 항을 미분하면 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 5$이다. 여기에 알려진 입력 $x = 1$을 넣는다.

결과 · 다음 연결

$f'(1) = 3 - 4 + 5 = 4$이므로 정답은 ③이다.

공통과목 3번 해설

3번 | 정답 ④ | 3점

R1. 같은 간격의 세 항 연결

조건

등차수열에서 $a_3=7$, $a_9=25$이고 $6-3=9-6=3$이다.

사용 과정

공차를 d라 하면 $a_6-a_3=3d$, $a_9-a_6=3d$이다. 따라서 $2a_6=a_3+a_9=32$이다.

결과 · 다음 연결

$a_6=16$이다. 공차나 첫째항을 따로 구할 필요는 없다.

4번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 분모가 0인 지점에서 분자 조건 찾기

조건

$x=2$에서 연속이어야 하며, $x\neq 2$일 때 분모가 $x-2$이다.

사용 과정

유한한 함숫값 b와 극한이 같아지려면 분자도 $x=2$에서 0이어야 한다. 따라서 $4+2a-6=0$이다.

결과 · 다음 연결

$a=1$이다. 이제 분자와 분모의 공통 인수를 약분하여 극한을 구한다.

공통과목 4번 해설

R2. 극한과 함숫값을 같게 놓기

조건

$a=1$이고 $f(2)=b$이다.

사용 과정

$x^2+x-6=(x-2)(x+3)$이므로 $x\neq 2$에서는 $f(x)=x+3$이다. 따라서 $\lim_{x\to 2} f(x)=5$이다. 연속성은 이 극한이 $f(2)$와 같다는 뜻이므로 $b=5$이다.

결과 · 다음 연결

$a+b=1+5=6$이다. 약분한 식을 $x=2$의 원래 정의로 쓰는 것이 아니라, 극한을 구하는 데 사용했다.

5번 | 정답 ④ | 3점

R1. 비율과 사분면 부호를 함께 사용

조건

$\pi/2<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$이고 $\tan\theta=-3/4$이다.

사용 과정

$\tan\theta=\sin\theta/\cos\theta$이므로 양수 k를 이용해 $\sin\theta=3k$, $\cos\theta=-4k$로 놓는다. 항등식 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 넣으면 $25k^2=1$이다.

$k>0$이므로 $k=1/5$이다. 따라서 $\sin\theta=3/5$, $\cos\theta=-4/5$이다.

결과 · 다음 연결

$\sin\theta-\cos\theta=3/5-(-4/5)=7/5$이다.

공통과목 6번 해설

6번 | 정답 ① | 3점

R1. 극대점 조건과 함숫값으로 계수 정하기

조건

a, b는 아직 모르는 계수이며, 다항함수 f가 $x=1$에서 극대이다. 또한 $f(0)=2$이다.

사용 과정

미분가능한 함수가 극대인 점에서는 미분계수가 0이다. $f'(x)=3x^2-6ax+9$이므로 $f'(1)=12-6a=0$에서 $a=2$이다. $f(0)=b=2$에서 $b=2$이다.

결과 · 다음 연결

$f(x)=x^3-6x^2+9x+2$이다. 두 조건이 서로 다른 계수의 값을 정한다.

R2. 극대 여부를 확인하고 목표값 계산하기

조건

구한 함수가 실제로 $x=1$에서 극대인지 확인하고 $f(2)$를 구한다.

사용 과정

$f'(x)=3(x-1)(x-3)$은 $x=1$의 충분히 가까운 왼쪽에서 양수, 충분히 가까운 오른쪽에서 음수이므로 극대 조건을 만족한다. 이어서 $f(2)=8-24+18+2$를 계산한다.

결과 · 다음 연결

$f(2)=4$이므로 정답은 ①이다.

공통과목 7번 해설

7번 | 정답 ① | 3점

R1. 넓이와 정적분의 부호 구별

조건

$0 \le x \le 3$에서 $f(x) < 0$이고, 그래프와 x축 사이 넓이는 5이다.

사용 과정

그래프가 x축 아래에 있으므로 넓이는 $\int_0^3 (0 - f(x))\,dx$이다. 따라서 $-\int_0^3 f(x)\,dx = 5$이다.

결과 · 다음 연결

$\int_0^3 f(x)\,dx = -5$를 얻었다. 대칭성을 이용해 음의 구간까지 확장한다.

R2. 대칭 적분과 상수 적분 합하기

조건

$f(-x) = f(x)$이고 $\int_0^3 f(x)\,dx = -5$이다.

사용 과정

짝함수의 양쪽 대칭 구간 적분은 같으므로 $\int_{-3}^3 f(x)\,dx = 2(-5) = -10$이다.

상수 2의 적분은 높이 2와 구간 길이 6의 곱인 $\int_{-3}^3 2\,dx = 12$이다. 적분의 덧셈 성질로 두 결과를 합한다.

결과 · 다음 연결

목표 적분값은 $-10 + 12 = 2$이다.

공통과목 8번 해설

8번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 등비중항과 양수 조건으로 항 결정

조건

모든 항이 양수인 등비수열이고 $a_2a_4=36$이다.

사용 과정

공비를 r라 하면 $a_3=a_2r$, $a_4=a_2r^2$이므로 $a_3^2=a_2a_4=36$이다. $a_3>0$이라는 조건에 따라 양의 제곱근을 택한다.

결과 · 다음 연결

$a_3=6$이다. 이를 나머지 조건 $a_3+a_5=30$에 넣는다.

R2. 공비의 부호까지 결정하여 다음 항 계산

조건

$a_3=6$, $a_3+a_5=30$이며 모든 항은 양수이다.

사용 과정

$a_5=24$이고 두 칸 이동한 비는 $r^2=a_5/a_3=4$이다. 모든 항이 양수이므로 연속한 항의 비 r도 양수여서 $r=2$이다.

결과 · 다음 연결

$a_6=a_5r=24\times2=48$이다.

공통과목 9번 해설

9번 | 정답 ② | 4점

R1. 접점을 미지수로 놓아 접선의 통과 조건 만들기

조건

점 $\mathrm{P}(0, a)$는 두 접선이 지나는 점이다. 곡선 위의 접점은 주어지지 않았다.

사용 과정

모르는 접점의 x좌표를 t라 두면 접점은 (t, t^2+2t)이다. 함수의 도함수는 $2x+2$이므로 그 점에서 접선의 기울기는 $2t+2$이다.

접선식은 $y-(t^2+2t)=(2t+2)(x-t)$이며, 정리하면 $y=(2t+2)x-t^2$이다. 이 직선이 $(0, a)$를 지나므로 $a=-t^2$이다.

결과 · 다음 연결

가능한 접점의 x좌표는 $t^2=-a$의 해이다. 서로 다른 두 접선 조건을 이용해 두 해를 정한다.

R2. 서로 다른 두 접점의 기울기 곱 연결

조건

$t^2=-a$이며 서로 다른 두 접선의 기울기 곱이 -8이다.

사용 과정

$a>0$이면 실수 접점이 없고 $a=0$이면 접선이 하나뿐이다. 따라서 $a<0$이며 두 접점은 $t=\sqrt{-a}$와 $t=-\sqrt{-a}$에 대응한다.

두 기울기는 $2+2\sqrt{-a}$, $2-2\sqrt{-a}$이다. 곱하면 $4-4(-a)=4+4a$이므로 $4+4a=-8$이다.

결과 · 다음 연결

$a=-3$이다. 이때 접점의 x좌표가 $\pm\sqrt{3}$으로 서로 달라 두 접선 조건도 만족한다.

공통과목 10번 해설

10번 | 정답 ① | 4점

R1. 중점과 기울기로 직선 결정

조건

선분 AB의 중점은 $(3,3)$이고 직선 AB의 기울기는 -1이다.

사용 과정

직선은 중점을 지나므로 $y-3=-(x-3)$, 즉 $x+y=6$이다. 따라서 A의 좌표는 이 직선과 $y=2^x$를 연립하여 구할 수 있다.

$y=2^x$와 $y=\log_2 x$는 서로 역함수이며, 좌표를 맞바꾸면 한 그래프의 점이 다른 그래프의 점이 된다. 직선 $x+y=6$도 좌표를 맞바꾸어 유지된다.

결과 · 다음 연결

A를 구하면 좌표를 맞바꾸어 B를 얻을 수 있다. 두 함수의 교점이 아니라 각 함수와 직선 AB의 교점을 찾는다.

R2. 좌표의 유일성을 확인하고 넓이 계산

조건

A는 $2^x=6-x$를 만족하며 B는 A의 좌표를 맞바꾼 점이다.

사용 과정

2^x는 증가하고 $6-x$는 감소하므로 두 식이 같은 해는 많아야 하나이다. $x=2$를 대입하면 양변이 4로 같으므로 $\mathrm{A}=(2,4)$이다.

따라서 $\mathrm{B}=(4,2)$이다. 원점과 두 점이 만드는 삼각형의 넓이는 두 좌표 곱의 차의 절반이므로 $|2\times 2-4\times 4|/2=6$이다.

결과 · 다음 연결

삼각형 OAB의 넓이는 6이다. 두 점의 중점 $(3,3)$과 직선의 기울기 -1도 원조건과 일치한다.

공통과목 11번 해설

11번 | 정답 ② | 4점

R1. 큰 삼각형의 변을 구해 작은 삼각형의 입력 준비

조건

$\mathrm{AB}=5$, $\mathrm{AC}=7$, 끼인각은 $\pi/3$이며 $\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=1:2$이다.

사용 과정

두 변과 끼인각을 알므로 코사인법칙을 사용한다. $\mathrm{BC}^2=5^2+7^2-2\cdot5\cdot7\cos(\pi/3)=39$이다.

D는 선분 BC를 $1:2$로 나누므로 $\mathrm{BD}=\sqrt{39}/3$, $\mathrm{DC}=2\sqrt{39}/3$이다.

결과 · 다음 연결

작은 두 삼각형 ABD와 ACD에서 AD를 제외한 두 변을 알게 되었다. 다음에는 두 삼각형의 식을 함께 사용한다.

R2. 보각의 코사인항을 소거하여 목표 길이 얻기

조건

AD는 두 삼각형의 공통변이고 B, D, C는 한 직선 위에 있다.

사용 과정

모르는 길이 AD를 r로, $\angle\mathrm{ADB}$를 ϕ로 놓는다. 그러면 $\angle\mathrm{ADC}=\pi-\phi$이고 $\cos(\pi-\phi)=-\cos\phi$이다.

삼각형 ABD에 코사인법칙을 쓰면 $25=r^2+13/3-(2\sqrt{39}/3)r\cos\phi$이다.

삼각형 ACD에서는 $49=r^2+52/3+(4\sqrt{39}/3)r\cos\phi$이다. 두 식의 코사인항은 부호가 반대이고 크기는 두 배 차이므로 첫 식의 두 배와 둘째 식을 더한다.

그러면 $2\times25+49=3r^2+(26+52)/3$, 즉 $99=3r^2+26$이 된다.

결과 · 다음 연결

$3\mathrm{AD}^2=3r^2=73$이다. 각 ϕ를 따로 구하지 않고도 목표를 결정할 수 있다.

공통과목 12번 해설

12번 | 정답 ② | 4점

R1. 부정적분의 관계를 미분해 도함수 얻기

조건

F는 f의 한 부정적분이므로 $\mathrm{F}'(x)=f(x)$이다. 또한 $\mathrm{F}(x)=(x+1)f(x)-2x^3-5x^2-4x$이다.

사용 과정

양변을 미분하고 곱의 미분법을 쓰면 $f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)-6x^2-10x-4$이다. 양변의 $f(x)$를 지운다.

따라서 $(x+1)f'(x)=2(x+1)(3x+2)$이다. $x\neq -1$에서는 $f'(x)=6x+4$이고, 양변이 연속인 다항함수이므로 $x=-1$에서도 같다.

결과 · 다음 연결

$f(x)=3x^2+4x+c$이다. c는 아직 정해지지 않은 적분상수이며, 주어진 $\mathrm{F}(1)$로 정한다.

R2. 원래 관계와 한 함숫값으로 상수 결정

조건

$f(x)=3x^2+4x+c$, $\mathrm{F}(1)=9$이다.

사용 과정

이 $f(x)$를 원래 관계에 넣으면 $\mathrm{F}(x)=x^3+2x^2+cx+c$이다. 따라서 $\mathrm{F}(1)=1+2+c+c=9$여서 $c=3$이다.

목표 적분은 $\int_0^1(3x^2+4x+3)\,dx$이다. 원시함수 x^3+2x^2+3x에 양 끝점을 대입한다.

결과 · 다음 연결

정적분값은 $(1+2+3)-0=6$이다.

공통과목 13번 해설

13번 | 정답 ⑤ | 4점

R1. 함수의 차에서 계수를 정하고 접선 만들기

조건

f는 최고차항 계수 1인 삼차함수이고 $f(x+1)-f(x)=3x^2+3x-5$이다.

사용 과정

아직 모르는 계수를 a, b, c로 두어 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$로 쓴다. 차를 전개하면 $3x^2+(3+2a)x+(1+a+b)$이다.

같은 차수의 계수를 비교하면 $3+2a=3$, $1+a+b=-5$이므로 $a=0$, $b=-6$이다. 따라서 $f(x)=x^3-6x+c$이고 $f'(x)=3x^2-6$이다.

접점의 x좌표가 1이므로 접점은 $(1, c-5)$, 기울기는 -3이다. 접선식은 $y-(c-5)=-3(x-1)$이다.

결과 · 다음 연결

접선은 $y=-3x+c-2$이다. c가 정해지지 않았지만 곡선과 접선의 차에서는 사라진다.

R2. 높이 차의 영점과 부호로 넓이 적분

조건

곡선은 $y=x^3-6x+c$, 접선은 $y=-3x+c-2$이다.

사용 과정

두 높이의 차는 $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$이다. 따라서 서로 다른 교점의 x좌표는 -2, 1이다.

$-2<x<1$에서 $(x-1)^2>0$, $x+2>0$이므로 곡선이 접선보다 위에 있다. 따라서 넓이는 $\mathrm{S}=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx$이다.

원시함수는 $x^4/4-3x^2/2+2x$이다. $x=1$에서 $3/4$, $x=-2$에서 -6이므로 $\mathrm{S}=3/4-(-6)=27/4$이다.

결과 · 다음 연결

$4\mathrm{S}=27$이다. 세로 위치를 바꾸는 c는 두 그래프에 공통으로 더해져 넓이에 영향을 주지 않는다.

공통과목 14번 해설

14번 | 정답 ③ | 4점

R1. 넓이의 비를 두 현의 길이 비로 바꾸기

조건

두 삼각형 ABP, ACP는 변 AP를 공유하고, AB와 AC의 길이는 각각 2, 3이다. 네 점 A, B, C, P는 같은 원 위에 있다.

사용 과정

넓이 공식으로 두 넓이의 비는 $2\sin\angle BAP : 3\sin\angle PAC$이다. 아직 모르는 공통 외접원의 반지름을 R이라 하자.

같은 원의 사인법칙에서 $BP = 2R\sin\angle BAP$, $PC = 2R\sin\angle PAC$이다. 따라서 넓이의 비는 $2BP : 3PC$와 같다.

결과 · 다음 연결

$2BP : 3PC = 4 : 3$이므로 $BP = 2PC$이다. 반지름 R을 직접 구하지 않아도 두 현의 길이 비가 결정된다.

R2. 원주각을 옮겨 두 현의 실제 길이 구하기

조건

R1에서 $BP = 2PC$를 얻었고, 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 알고 있다. P와 A는 현 BC의 서로 반대쪽에 있다.

사용 과정

삼각형 ABC에 코사인법칙을 적용하면 $\cos\angle BAC = (2^2 + 3^2 - (\sqrt{7})^2)/(2 \cdot 2 \cdot 3) = 1/2$이다. 따라서 $\angle BAC = \pi/3$이다.

원에 내접한 사각형 ABPC의 마주 보는 두 각의 합은 π이므로 $\angle BPC = 2\pi/3$이다. 모르는 길이 PC를 양수 t라 두면 BP는 $2t$이다.

삼각형 BPC에서 $(\sqrt{7})^2 = (2t)^2 + t^2 - 2(2t)t\cos(2\pi/3) = 7t^2$이다. $t > 0$이므로 $t = 1$이다.

결과 · 다음 연결

$PC = 1$, $BP = 2$이다. 목표 AP가 들어 있는 삼각형 ABP에서 AB와 BP의 길이를 모두 알게 되었다.

공통과목 14번 해설

R3. 같은 현의 원주각을 마지막 삼각형에 사용하기

조건

목표 AP는 삼각형 ABP의 변이며 $\mathrm{AB}=\mathrm{BP}=2$이다. P와 C는 현 AB의 같은 쪽 원주 위에 있으므로 $\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{ACB}$이다.

사용 과정

먼저 원래 삼각형 ABC에서 $\cos\angle\mathrm{ACB}=(3^2+(\sqrt{7})^2-2^2)/(2\cdot3\cdot\sqrt{7})=2/\sqrt{7}$을 얻는다. 이 값을 삼각형 ABP의 각 APB에 그대로 사용할 수 있다.

아직 모르는 AP의 길이를 양수 x라 두고 코사인법칙을 사용한다.
$2^2=x^2+2^2-2\cdot x\cdot2\cdot(2/\sqrt{7})$이므로 $x(x-8/\sqrt{7})=0$이다.

결과 · 다음 연결

P는 A와 다른 점이므로 $x>0$이다. 따라서 $\mathrm{AP}=8/\sqrt{7}=8\sqrt{7}/7$이다.

15번 | 정답 ④ | 4점

R1. 실근 세 개가 되는 높이를 극값과 연결하기

조건

최고차항 계수가 양수인 사차함수에서, 수평선 $y=t$와의 서로 다른 교점이 세 개인 높이는 $t=4$, $t=6$이다.

사용 과정

사차방정식에 서로 다른 실근이 세 개이면 그중 하나는 중근이다. 그 점은 수평선에 접하는 극값의 위치이다. 또한 세 교점 사이의 기울기 변화까지 고려하면 그래프에는 두 극소점과 그 사이의 극대점이 있다.

두 극소값이 서로 다를 때, 높은 쪽 극소값의 높이에서는 한쪽 골짜기를 두 번 지나고 다른 쪽 극소점에서 한 번 접하여 교점이 세 개이다. 극대값의 높이에서는 극대점에서 접하고 양쪽 바깥에서 한 번씩 만나 역시 세 개이다. 두 극소값이 같다면 그 높이에서는 교점이 두 개여서, 세 개가 되는 높이는 극대값 하나뿐이다.

결과 · 다음 연결

극대값은 두 높이 중 큰 6이고, 두 극소값 중 큰 값은 4이다. 따라서 $f(0)=6$, $f'(0)=0$인 $x=0$은 극대점이다.

공통과목 15번 해설

R2. 어느 극소점에서 값이 4인지 정하기

조건

$x=0$은 극대점이고 $f'(1)=0$이다. 사차함수의 두 극소점은 극대점의 양쪽에 하나씩 있으므로 $x=1$은 오른쪽 극소점이다.

사용 과정

왼쪽 극소점의 x좌표를 아직 모르는 값 r이라 하면 $r<0$이다. $x<0$인 부분에서 가장 작은 함숫값이 $f(r)$이므로 $f(r)\le f(-1)<4$이다.

결과 · 다음 연결

왼쪽 극소값은 4보다 작다. 두 극소값 중 큰 값이 4이므로 오른쪽 극소점에서 $f(1)=4$이다. 이 함숫값을 미분계수 조건과 함께 사용하여 계수를 정한다.

R3. 함숫값과 미분계수를 같은 계수의 식으로 모으기

조건

$f(0)=6$, $f'(0)=0$, $f(1)=4$, $f'(1)=0$을 얻었다.

사용 과정

아직 모르는 계수를 a,b,c,d로 두어 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 쓰면, $f(0)=6$에서 $d=6$, $f'(0)=0$에서 $c=0$이다.

따라서 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+6$이다. $f(1)=4$를 넣으면 $a+b=-3$이고, $f'(1)=0$을 넣으면 $3a+2b=-4$이다. 첫 식의 두 배를 둘째 식에서 빼면 $a=2$, 이어서 $b=-5$이다.

결과 · 다음 연결

함수는 $f(x)=x^4+2x^3-5x^2+6$으로 정해진다. 따라서 $f(2)=16+16-20+6=18$이다.

R4. 정해진 함수에서 원래 교점 조건 확인하기

조건

구한 함수가 (나)와 (다)를 실제로 만족하는지 확인한다. 필요한 조건으로 얻은 식만으로 답을 확정하지 않는다.

사용 과정

$f'(x)=2x(2x+5)(x-1)$이므로 극소점은 $x=-5/2$, $x=1$이고 극대점은 $x=0$이다. 각 극값은 차례로 $-279/16$, 4, 6이며 $f(-1)=0<4$이다.

공통과목 15번 해설

$t=4$에서 $f(x)-4=(x-1)^2(x^2+4x+2)$이므로 서로 다른 실근은 1, $-2-\sqrt{2}$, $-2+\sqrt{2}$의 세 개이다. $t=6$에서는 $f(x)-6=x^2(x^2+2x-5)$이므로 실근은 0, $-1-\sqrt{6}$, $-1+\sqrt{6}$의 세 개이다.

각 극값 사이에서는 네 단조 구간의 교점 수가 변하지 않는다. 가장 낮은 극소값에서는 한 개, 그보다 낮은 높이에서는 영 개이며, 나머지 높이에서의 교점 수는 두 개 또는 네 개이다. 따라서 세 개가 되는 다른 높이는 없다.

결과 · 다음 연결

모든 조건을 만족하므로 정답은 18, 즉 ④이다.

16번 | 정답 64 | 3점

R1. 로그를 지수 관계로 바꾸어 차례로 계산

조건

$\log_2 a=3$, $\log_a b=2$이다.

사용 과정

로그의 정의에 따라 첫 식은 $a=2^3=8$이다. 두 번째 식은 $b=a^2$이므로 앞에서 구한 a를 넣는다.

결과 · 다음 연결

$b=8^2=64$이다. 구한 $a=8$은 로그의 밑 조건 $a>0$, $a\neq 1$도 만족한다.

공통과목 17번 해설

17번 | 정답 6 | 3점

R1. 각 항을 적분한 뒤 끝점의 값 차 계산

조건

적분 구간은 $0 \le x \le 2$이고 피적분함수는 $3x^2 - 2x + 1$이다.

사용 과정

각 항을 적분한 원시함수는 $x^3 - x^2 + x$이다. 정적분은 위끝점의 값에서 아래끝점의 값을 빼므로 $(8 - 4 + 2) - 0$이다.

결과 · 다음 연결

정적분값은 6이다.

18번 | 정답 2 | 3점

R1. 부분합의 차로 항을 복원하고 첫째항 확인

조건

$S_n = n(n+2)$는 첫째항부터 제n항까지의 합이다.

사용 과정

$n \ge 2$에서 $a_n = S_n - S_{n-1}$이다. 따라서 $a_n = n(n+2) - (n-1)(n+1) = 2n + 1$이다.

첫째항에는 앞선 부분합이 없으므로 따로 $a_1 = S_1 = 3$을 확인한다. 이는 $2 \cdot 1 + 1 = 3$과 같아 일반식이 첫째항에도 성립한다.

결과 · 다음 연결

모든 자연수 n에서 $a_n = 2n + 1$이다. 따라서 목표 분모는 $a_k a_{k+1} = (2k+1)(2k+3)$이다.

공통과목 18번 해설

R2. 분수의 차로 바꾸어 중간 항 소거

조건

$a_k a_{k+1} = (2k+1)(2k+3)$이고 $k=1$부터 6까지 더한다.

사용 과정

두 분모의 차가 2이므로 $1/(2k+1) - 1/(2k+3) = 2/\{(2k+1)(2k+3)\}$이다. 따라서 원래 항은 이 차의 절반이다.

합을 펼치면 $\frac{1}{2}\{(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{13}-\frac{1}{15})\}$이다. 중간 분수는 앞뒤에서 한 번씩 더해지고 빠져 모두 소거된다.

결과 · 다음 연결

합은 $\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{15}) = \frac{2}{15}$이다. 여기에 문제의 계수 15를 곱한 답은 2이다.

19번 | 정답 16 | 3점

R1. 무한대에서의 극한으로 함수의 차수와 최고차항 정하기

조건

f는 다항함수이고 $f(x)/x^2$의 극한은 유한한 양수 2이다.

사용 과정

차수가 2보다 작으면 극한은 0이고, 차수가 2보다 크면 유한한 값에 수렴하지 않는다. 따라서 f는 이차함수이며 최고차항의 계수는 2이다. 아직 모르는 나머지 계수를 b, c라 두어 $f(x) = 2x^2 + bx + c$라 쓴다.

결과 · 다음 연결

첫 극한으로 함수의 형태가 $2x^2+bx+c$로 좁혀졌다. 나머지 두 계수는 $x=1$에서의 극한으로 정한다.

공통과목 19번 해설

R2. 유한한 극한의 조건을 인수와 계수에 연결하기

조건

$x \to 1$에서 분모 $x-1$은 0으로 가지만 몫의 극한은 4로 유한하다. 다항함수는 연속이다.

사용 과정

따라서 분자도 0으로 가야 하므로 $f(1)=2+b+c=0$이다. $c=-2-b$를 넣으면 $f(x)=(x-1)(2x+b+2)$로 인수분해된다.

$x \neq 1$에서 $f(x)/(x-1)=2x+b+2$이므로 그 극한은 $b+4$이다. $b+4=4$에서 $b=0$, 따라서 $c=-2$이다.

결과 · 다음 연결

$f(x)=2x^2-2$이다. 실제로 두 극한을 모두 만족하며 $f(3)=18-2=16$이다.

20번 | 정답 94 | 4점

R1. 만나는 시각으로 일정한 속도를 정하기

조건

두 점은 모두 원점에서 출발하고 Q의 속도는 일정하다. $t=5$에서 두 점의 위치가 같다.

사용 과정

아직 모르는 Q의 속도를 v라 두면 시각 t에서 Q의 위치는 vt이다. P의 $t=5$에서의 위치는 $125-200+90=15$이므로 $5v=15$, 즉 $v=3$이다.

결과 · 다음 연결

두 위치의 차이를 $d(t)$라 하면 $d(t)=t^3-8t^2+15t=t(t-3)(t-5)$이다. 실제 거리는 부호를 제거한 $|d(t)|$이다.

공통과목 20번 해설

R2. 거리의 식이 바뀌는 시각과 극값 후보 찾기

조건

목표는 $0 \le t \le 5$에서 $|d(t)|$의 최댓값이다. $d(t)$는 $t=0, 3, 5$에서 0이다.

사용 과정

$0<t<3$에서는 $d(t)>0$, $3<t<5$에서는 $d(t)<0$이다. 따라서 두 구간의 거리식은 각각 $d(t)$, $-d(t)$이다. 각 구간 안에서 극값이 생기는 시각은 $d'(t)=3t^2-16t+15=0$으로 찾는다.

두 해를 $\alpha=(8-\sqrt{19})/3$, $\beta=(8+\sqrt{19})/3$이라 두면 $0<\alpha<3<\beta<5$이다. d'의 부호는 양수, 음수, 양수로 바뀐다.

결과 · 다음 연결

거리의 후보는 $d(\alpha)$, $-d(\beta)$ 및 경계 $t=0, 3, 5$에서의 0이다. 부호가 다른 두 극값을 그대로 비교하지 않고 거리로 바꾸어 비교한다.

R3. 두 극값을 계산하여 더 큰 거리 선택하기

조건

α, β는 모두 $3t^2-16t+15=0$을 만족한다. 이 관계를 이용하면 세제곱을 직접 전개하지 않고 $d(t)$를 계산할 수 있다.

사용 과정

극값 후보에서 $t^2=(16t-15)/3$, $t^3=(211t-240)/9$이므로 $d(t)=(120-38t)/9$이다. 따라서 $d(\alpha)=(56+38\sqrt{19})/27$, $d(\beta)=(56-38\sqrt{19})/27$이다.

두 거리의 후보는 $(56+38\sqrt{19})/27$과 $(38\sqrt{19}-56)/27$이다. 첫 값이 둘째 값보다 $112/27$만큼 크며 경계의 거리 0보다도 크다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{M}=(56+38\sqrt{19})/27$이다. 따라서 자연수 $p=56$, $q=38$이고 $p+q=94$이다.

공통과목 21번 해설

21번 | 정답 504 | 4점

R1. 처음으로 절댓값 분기가 바뀌는 번호 정하기

조건

a_1은 100 이하 자연수이며 $a_{n+1} = |a_n - n|$ 이다.

사용 과정

처음 값을 $\mathrm{A} = a_1$이라 놓고 $a_k \le k$가 처음 성립하는 번호를 k라 하자. 그 전에는 $a_n > n$이므로 절댓값이 그대로 풀려 $a_{n+1} = a_n - n$이다.

따라서 $a_k = \mathrm{A} - (1 + 2 + \cdots + (k-1)) = \mathrm{A} - k(k-1)/2$이다. 최초 전환 전에는 항들이 양수이므로 $a_k > 0$이고 전환 조건까지 합하면 $0 < \mathrm{A} - k(k-1)/2 \le k$이다.

이는 $k(k-1)/2 < \mathrm{A} \le k(k+1)/2$와 같다. 이 구간들은 양의 정수를 빠짐없이 나누므로 주어진 A마다 k가 하나 정해진다. $\mathrm{A} \le 100$이고 $14 \cdot 13/2 = 91$, $15 \cdot 14/2 = 105$이므로 $1 \le k \le 14$이다.

결과 · 다음 연결

최초 전환 번호 k와 항 $a_k = \mathrm{A} - k(k-1)/2$를 얻었다. 이후에도 같은 분기가 유지되는지 확인해야 먼 항으로 이동할 수 있다.

R2. 전환 이후 두 칸마다 일정하게 증가하는 관계 증명

조건

전환 시점에는 $0 \le a_k \le k$이다.

사용 과정

어떤 n에서 $0 \le a_n \le n$이면 $a_{n+1} = n - a_n$이므로 $0 \le a_{n+1} \le n < n+1$이다. 따라서 다음 번호에서도 같은 조건이 유지된다.

그러므로 모든 $n \ge k$에서 $a_{n+1} = n - a_n$이다. 이를 두 번 적용하면
$a_{n+2} = (n+1) - (n - a_n) = a_n + 1$이다.

결과 · 다음 연결

전환 이후 같은 홀짝 번호의 항은 두 번호가 늘 때마다 1씩 증가한다. 이 관계로 2027번째 항을 a_k 또는 a_{k+1}과 연결한다.

공통과목 21번 해설

R3. 목표 번호와 같은 홀짝의 항에서 역산

조건

$a_{2027}=1013$이고 전환 이후에는 $a_{n+2}=a_n+1$이다.

사용 과정

k가 홀수이면 k와 2027의 홀짝이 같다. 두 칸 이동을 $(2027-k)/2$번 하므로 $a_{2027}=a_k+(2027-k)/2$이다.

$a_k=\mathrm{A}-k(k-1)/2$를 넣으면 $a_{2027}=\mathrm{A}+(2027-k^2)/2$이다. 이를 1013과 같게 놓으면 $\mathrm{A}=(k^2-1)/2$이다.

k가 짝수이면 $k+1$이 홀수이므로 여기서 시작한다. $a_{k+1}=k-a_k=k(k+1)/2-\mathrm{A}$이고, $a_{2027}=a_{k+1}+(2026-k)/2$이다.

정리하면 $a_{2027}=1013+k^2/2-\mathrm{A}$이므로 $\mathrm{A}=k^2/2$이다.

결과 · 다음 연결

k가 홀수이면 $\mathrm{A}=(k^2-1)/2$, 짝수이면 $\mathrm{A}=k^2/2$가 필요하다. 이 후보들이 실제 최초 전환 범위와 첫째항 범위를 만족하는지 검사한다.

R4. 최초 전환 조건을 만족하는 후보만 합하기

조건

$1\le k\le 14$이며 각 k의 후보 A가 결정되었다.

사용 과정

$k=1$이면 $\mathrm{A}=0$이라 자연수 조건에 맞지 않는다. 홀수 $k\ge 3$에서는 $\mathrm{A}-k(k-1)/2=(k-1)/2$가 0보다 크고 k 이하이다. 짝수 $k\ge 2$에서는 그 차가 $k/2$이므로 역시 최초 전환 조건을 만족한다.

$k=2,3,\ldots,14$에 대응하는 A는 차례로 $2,4,8,12,18,24,32,40,50,60,72,84,98$이다. 모두 100 이하이고 서로 다르다.

이 중 짝수 $k=2j$에서 나온 값의 합은 $2(1^2+2^2+\cdots+7^2)=280$이다. 홀수 $k=2j+1$에서 나온 값의 합은 $2\sum_{j=1}^{6} j(j+1)=224$이다.

결과 · 다음 연결

가능한 모든 첫째항의 합은 $280+224=504$이다. 최초 전환 구간이 전체 후보를 빠짐없이 나누므로 다른 경우는 없다.

22번 | 정답 10 | 4점

R1. 로그식을 같은 지수곡선의 점으로 옮기기

조건

A는 $y=\log_{a^2}(2x)$ 위, B는 $y=a^x$ 위의 제1사분면 점이고 $\mathrm{OB}=2\mathrm{OA}$이다.

사용 과정

A의 모르는 좌표를 (p,q)라 두면 $p,q>0$이다. 로그의 정의로 $(a^2)^q=2p$, 즉 $a^{2q}=2p$이다. 그러므로 새 점 $\mathrm{C}=(2q,2p)$는 B와 같은 지수곡선 위에 있다.

C의 원점까지 거리는 $\sqrt{(2q)^2+(2p)^2}=2\sqrt{p^2+q^2}=2\mathrm{OA}$이므로 $\mathrm{OC}=\mathrm{OB}$이다.

$a>\sqrt{2}>1$이므로 지수곡선의 제1사분면 부분에서 x가 증가하면 $y=a^x$도 증가한다. 두 좌표가 모두 양수이므로 원점까지 거리도 엄격히 증가한다. 따라서 이 부분의 두 점이 원점까지 같은 거리에 있으면 같은 점이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{B}=\mathrm{C}=(2q,2p)$이다. 또한 A가 B보다 왼쪽이라는 원조건은 $p<2q$가 된다. 이제 두 점의 길이와 넓이를 p,q의 관계로 쓴다.

R2. 길이와 넓이를 합과 차의 관계로 바꾸기

조건

$\mathrm{A}=(p,q)$, $\mathrm{B}=(2q,2p)$이며 $\mathrm{AB}=5\sqrt{2}$, 삼각형 OAB의 넓이는 16이다.

사용 과정

거리 공식에서 $(2q-p)^2+(2p-q)^2=50$이다. 원점과 두 점의 삼각형 넓이는 $|p\cdot 2p-q\cdot 2q|/2$이므로 $|p^2-q^2|=16$이다.

합을 $u=p+q$, 차의 크기를 $v=|p-q|$라 두면 $u>0$, $v>0$이고 $uv=16$이다. 거리 식을 전개하면 $5(p^2+q^2)-8pq=50$이다.

$p^2+q^2=(u^2+v^2)/2$, $pq=(u^2-v^2)/4$를 넣으면 $u^2+9v^2=100$이다. 여기에 $6uv=96$을 더하면 $(u+3v)^2=196$이다.

$u,3v$가 모두 양수이므로 $u+3v=14$이며 곱은 $u\cdot 3v=48$이다. 합과 곱이 각각 $14,48$인 두 수는 $6,8$이므로 $(u,3v)=(8,6)$ 또는 $(6,8)$이다.

공통과목 22번 해설

결과 · 다음 연결

$(u, v) = (8, 2)$ 또는 $(6, 8/3)$이다. v는 차의 절댓값이므로 각각에서 $p > q$와 $p < q$를 모두 복원해야 한다.

R3. 좌표 후보에 원래 범위 조건을 다시 적용

조건

$p + q = u$, $|p - q| = v$이며 $p < 2q$, $a > \sqrt{2}$, $a^{2q} = 2p$를 만족해야 한다.

사용 과정

p, q는 $(u + v)/2$, $(u - v)/2$를 순서를 바꾸어 얻는다. 따라서 네 후보는 $(5, 3)$, $(3, 5)$, $(13/3, 5/3)$, $(5/3, 13/3)$이다.

$(13/3, 5/3)$에서는 $p = 13/3 > 10/3 = 2q$여서 A가 더 왼쪽이라는 조건에 맞지 않는다.

$(3, 5)$에서는 $a^{10} = 6$이어야 한다. 그러나 $a > \sqrt{2}$이면 $a^{10} > 32$이므로 모순이다.

$(5/3, 13/3)$에서는 $a^{26/3} = 10/3$이어야 한다. 그러나 같은 밑 조건에서 $a^{26/3} > 2^{13/3} > 16$이므로 역시 모순이다.

결과 · 다음 연결

남는 후보는 $(p, q) = (5, 3)$이다. 로그에서 얻은 관계 $a^{2q} = 2p$에 넣으면 $a^6 = 10$이다. 마지막으로 실제 성립하는 배치인지 확인한다.

R4. 남은 후보가 모든 조건을 만족하는지 확인

조건

후보는 $a = 10^{1/6}$, $\mathrm{A} = (5, 3)$, $\mathrm{B} = (6, 10)$이다.

사용 과정

$a^6 = 10 > 8 = (\sqrt{2})^6$이므로 $a > \sqrt{2}$이다. $\log_{a^2} 10 = 3$이고 $a^6 = 10$이어서 두 점은 각각 지정된 곡선 위에 있다.

$\mathrm{OA} = \sqrt{34}$, $\mathrm{OB} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$이며 $\mathrm{AB} = \sqrt{(6-5)^2 + (10-3)^2} = 5\sqrt{2}$이다.

두 점은 제1사분면에 있고 $5 < 6$이다. 넓이도 $|5 \cdot 10 - 3 \cdot 6|/2 = 16$으로 원조건과 같다.

결과 · 다음 연결

모든 조건을 만족하는 값이 실제로 존재하므로 최종 답은 $a^6 = 10$이다.

확률과 통계 해설

확률과 통계 해설

23번 | 정답 ⑤ | 2점

R1. 네 번의 x 선택과 두 번의 상수 선택을 센다

조건

$(x+2)^6$은 같은 인수 $(x+2)$ 여섯 개의 곱이다. 구하는 것은 x^4의 계수이다.

사용 과정

x^4을 얻으려면 네 인수에서는 x, 나머지 두 인수에서는 2를 골라야 한다. 상수 2를 고르는 두 자리를 정하는 방법은 ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$가지이며, 각 선택에서 상수 부분은 $2^2 = 4$이다.

결과 · 다음 연결

계수는 $15 \times 4 = 60$이다.

24번 | 정답 ① | 3점

R1. 독립 조건과 사건의 분할로 B의 확률을 구한다

조건

A, B가 독립이고 $\mathrm{P}(\mathrm{A}) = 1/3$, $\mathrm{P}(\mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}) = 1/6$이다.

사용 과정

아직 모르는 $\mathrm{P}(\mathrm{B})$를 p라 두자. 독립이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{P}(\mathrm{A})\mathrm{P}(\mathrm{B}) = p/3$이다.

B는 $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$와 $\mathrm{A}^c \cap \mathrm{B}$의 서로 겹치지 않는 두 부분으로 나뉜다. 따라서 $p = p/3 + 1/6$이고, $(2/3)p = 1/6$이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{P}(\mathrm{B}) = p = 1/4$이다. 이를 독립 관계에 다시 넣으면 목표 교집합의 확률을 얻는다.

확률과 통계 24번 해설

R2. 구한 확률을 교집합에 사용한다

조건

앞에서 $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 1/4$를 구했고, 독립 조건은 그대로 유효하다.

사용 과정

$\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = (1/3)(1/4)$로 계산한다.

결과 · 다음 연결

구하는 확률은 $1/12$이다.

25번 | 정답 ③ | 3점

R1. 꼬리확률에서 표본평균의 표준편차를 복원한다

조건

모집단은 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$이고 표본 크기는 n이다. $\mathrm{P}(\overline{\mathrm{X}} \geq m+3) = 0.1587$이다.

사용 과정

크기 n인 표본평균의 평균은 m, 표준편차는 $\sigma/\sqrt{n}$이다. 따라서 $\mathrm{Z} = (\overline{\mathrm{X}} - m)/(\sigma/\sqrt{n})$로 표준화하면 주어진 확률의 경계는 $3/(\sigma/\sqrt{n})$이 된다.

주어진 표에서 $\mathrm{P}(\mathrm{Z} \geq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$이다. 표준정규분포의 오른쪽 꼬리확률은 경계가 커질수록 감소하므로 $3/(\sigma/\sqrt{n}) = 1$이다.

결과 · 다음 연결

$\sigma/\sqrt{n} = 3$이다. σ와 n을 각각 정하지 않아도 새 표본평균의 표준편차를 계산할 수 있다.

확률과 통계 25번 해설

R2. 표본 크기의 변화로 신뢰구간의 폭을 계산한다

조건

이번에는 표본 크기가 $4n$이고, 신뢰도 95%에 대응하는 표준정규분포의 경계는 1.96이다.

사용 과정

새 표본평균의 표준편차는 $\sigma/\sqrt{4n} = (\sigma/\sqrt{n})/2 = 3/2$이다. 표본 크기가 네 배이면 표준편차는 절반이 된다.

실제 표본평균을 $\overline{y}$라 쓰면 구간의 양 끝은 $a = \overline{y} - 1.96(3/2)$, $b = \overline{y} + 1.96(3/2)$이다. 두 끝의 차에서 $\overline{y}$는 소거된다.

결과 · 다음 연결

$b - a = 2 \times 1.96 \times (3/2) = 5.88$이다.

26번 | 정답 ② | 3점

R1. 첫 공의 색에 따라 두 번째 주머니의 구성을 정한다

조건

처음 주머니에는 흰 공 3개와 검은 공 2개가 있다. 첫 공은 다시 넣고 반대 색 공을 한 개 추가한다.

사용 과정

첫 공이 흰색인 사건을 W, 검은색인 사건을 B라 하자. $\mathrm{P}(\mathrm{W}) = 3/5$, $\mathrm{P}(\mathrm{B}) = 2/5$이다.

W이면 검은 공을 추가하므로 두 번째 구성은 흰 공 3개, 검은 공 3개이다. B이면 흰 공을 추가하므로 흰 공 4개, 검은 공 2개이다. 첫 공을 다시 넣는다는 조건 때문에 처음 뽑은 색의 개수는 줄지 않는다.

결과 · 다음 연결

두 경우 모두 두 번째 공의 총수는 6개이다. 각각에서 같은 색 두 공을 뽑을 확률을 따로 구한다.

확률과 통계 26번 해설

R2. 관측된 사건의 전체 확률을 구한다

조건

두 번째 두 공의 색이 같은 사건을 E라 하자. 두 공은 동시에 꺼내므로 순서 없이 고른다.

사용 과정

전체 선택은 ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$가지이다. W일 때 같은 색 선택은 ${}_3\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2 = 6$가지이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{E}\,|\,\mathrm{W}) = 2/5$이다.

B일 때 같은 색 선택은 ${}_4\mathrm{C}_2 + {}_2\mathrm{C}_2 = 7$가지이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{E}\,|\,\mathrm{B}) = 7/15$이다.

W와 B는 서로 겹치지 않으며 모든 첫 시행을 포함한다. 각 경우의 확률에 그 경우에서 E가 일어날 확률을 곱해 더하면 $\mathrm{P}(\mathrm{E}) = (3/5)(2/5) + (2/5)(7/15)$이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{P}(\mathrm{E}) = 32/75$이다. 이것이 관측 조건에 해당하는 전체 확률, 즉 조건부확률의 분모이다.

R3. 첫 공이 검은색인 부분을 분모와 비교한다

조건

구하는 것은 E가 일어났다는 조건에서 B일 확률이다.

사용 과정

분자는 B와 E가 모두 일어날 확률이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{E}) = (2/5)(7/15) = 14/75$이다. 따라서 $\mathrm{P}(\mathrm{B}\,|\,\mathrm{E}) = \mathrm{P}(\mathrm{B} \cap \mathrm{E})/\mathrm{P}(\mathrm{E})$이다.

결과 · 다음 연결

구하는 확률은 $(14/75)/(32/75) = 7/16$이다. 첫 번째와 두 번째 결과를 독립이라고 가정하지 않고, 첫 색에 따른 구성 변화를 반영했다.

27번 | 정답 ④ | 3점

R1. 한 번의 시행에서 2점을 얻는 확률을 구한다

조건

홀수 카드는 1, 3, 5의 세 장, 짝수 카드는 2, 4의 두 장이다. 두 장을 동시에 뽑으며 같은 홀짝일 때 2점이다.

사용 과정

전체 선택은 $_5C_2 = 10$가지이다. 2점인 선택은 홀수 두 장 또는 짝수 두 장이므로 $_3C_2 + {}_2C_2 = 4$가지이다.

결과 · 다음 연결

2점일 확률은 2/5, 나머지 -1점일 확률은 3/5이다.

R2. 총점을 성공 횟수로 바꾸어 시행 횟수를 정한다

조건

카드를 다시 넣으며 시행을 서로 독립적으로 n번 반복한다. 총점 S의 분산은 216/25이다.

사용 과정

2점을 얻은 횟수를 X라 두자. 매번 성공 확률이 2/5로 같고 시행들이 독립이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n, 2/5)$를 따른다.

나머지 $n-\mathrm{X}$번은 -1점이므로 $\mathrm{S} = 2\mathrm{X} - (n-\mathrm{X}) = 3\mathrm{X} - n$이다. 상수 이동은 분산을 바꾸지 않고 세 배는 분산을 아홉 배로 하므로 $\mathrm{V}(\mathrm{S}) = 9\mathrm{V}(\mathrm{X})$이다.

따라서 $\mathrm{V}(\mathrm{S}) = 9n(2/5)(3/5) = 54n/25$이고, 이를 216/25와 같게 놓는다.

결과 · 다음 연결

$n = 4$이다. 이제 $\mathrm{S} = 3\mathrm{X} - 4$를 이용해 총점 조건을 성공 횟수 조건으로 바꿀 수 있다.

확률과 통계 27번 해설

R3. 목표 점수에 해당하는 성공 횟수의 확률을 구한다

조건

X는 $\mathrm{B}(4, 2/5)$를 따르고 $\mathrm{S} = 3\mathrm{X} - 4$이다.

사용 과정

$\mathrm{S} = 2$이면 $3\mathrm{X} - 4 = 2$이므로 $\mathrm{X} = 2$이다. 네 번 중 성공할 두 위치를 고르는 ${}_4\mathrm{C}_2$와 각 시행의 확률을 곱한다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{P}(\mathrm{S} = 2) = {}_4\mathrm{C}_2 (2/5)^2 (3/5)^2 = 216/625$이다.

28번 | 정답 ③ | 4점

R1. 색이 바뀌는 횟수를 묶음의 개수로 바꾼다

조건

흰 공 5개와 검은 공 4개를 나열하며 색이 바뀌는 곳은 4곳이다. 같은 색 공끼리는 구별하지 않는다.

사용 과정

연속한 같은 색 공을 한 묶음으로 보면, 묶음 사이마다 색이 한 번 바뀐다. 따라서 묶음은 5개이고 각 묶음에는 적어도 한 공이 있다.

결과 · 다음 연결

가능한 색 순서는 흰-검-흰-검-흰 또는 검-흰-검-흰-검이다. 이 두 경우를 나누어 다섯 번째 공이 흰색이라는 조건을 적용한다.

R2. 흰색으로 시작할 때 가운데 흰 묶음의 크기로 센다

조건

묶음은 흰-검-흰-검-흰이다. 흰 묶음 크기를 w_1, w_2, w_3, 검은 묶음 크기를 b_1, b_2라 두면 모두 양의 정수이다.

확률과 통계 28번 해설

사용 과정

$w_1+w_2+w_3=5$, $b_1+b_2=4$이다. 첫째 흰 묶음은 길이가 최대 3이므로 5번째까지 갈 수 없고, 마지막 흰 묶음도 길이가 최대 3이므로 7번째 이후에서 시작한다. 따라서 5번째는 가운데 흰 묶음에 있어야 한다.

가운데 묶음 앞의 공 수는 w_1+b_1, 뒤의 공 수는 b_2+w_3이다. 5번째를 포함하려면 각각 4 이하이어야 한다. w_2의 가능한 값은 1, 2, 3이다.

$w_2=1$이면 앞뒤가 각각 4개이다. (w_1,b_1)은 $(1,3),(2,2),(3,1)$의 3가지이고 나머지는 각각 결정된다.

$w_2=2$이면 $(w_1,w_3)=(1,2)$ 또는 $(2,1)$이다. 전자는 $b_1=2,3$, 후자는 $b_1=1,2$이므로 4가지이다.

$w_2=3$이면 $w_1=w_3=1$이다. $b_1=1,2,3$이 모두 허용되므로 3가지이다.

결과 · 다음 연결

흰색으로 시작하는 경우는 $3+4+3=10$가지이다. 묶음 크기가 정해지면 공 배열도 하나로 정해진다.

R3. 검은색으로 시작할 때 다섯 번째가 들어갈 흰 묶음을 나눈다

조건

묶음은 검-흰-검-흰-검이다. 다섯 번째는 두 흰 묶음 중 정확히 하나에 들어간다.

사용 과정

먼저 첫째 흰 묶음에 들어가는 경우를 센다. 첫째 검은 묶음의 크기는 다른 검은 묶음에 한 개씩 남겨야 하므로 1 또는 2이다.

첫째 검은 묶음이 1개이면 첫째 흰 묶음은 2번째에서 시작한다. 5번째를 포함하려면 4개여야 한다. 남은 검은 공 3개를 두 양의 크기로 나누는 방법은 $(1,2),(2,1)$의 2가지이다.

첫째 검은 묶음이 2개이면 나머지 검은 묶음은 각각 1개이다. 첫째 흰 묶음은 3번째에서 시작하므로 그 크기는 3 또는 4가 가능하다. 따라서 2가지이다.

9개 배열을 좌우로 뒤집으면 가운데인 5번째 자리는 그대로이고 첫째 흰 묶음과 둘째 흰 묶음이 바뀐다. 그러므로 둘째 흰 묶음에 들어가는 경우도 같은 4가지이다. 두 흰 묶음은 겹치지 않는다.

결과 · 다음 연결

검은색으로 시작하는 경우는 $4+4=8$가지이다.

확률과 통계 28번 해설

R4. 서로 겹치지 않는 시작 색의 경우를 합한다

조건

흰색 시작 10가지와 검은색 시작 8가지를 얻었고, 이 두 경우가 전체 배열을 빠짐없이 나눈다.

사용 과정

시작 색이 다르므로 같은 배열을 중복해서 세지 않는다. 두 경우의 수를 더한다.

결과 · 다음 연결

구하는 경우의 수는 $10+8=18$이다.

29번 | 정답 11 | 4점

R1. 평균 4가 만들어지는 경우를 빠짐없이 나눈다

조건

X는 자연수 $a<b$만을 값으로 가지며 $\mathrm{E}(\mathrm{X})=5$이다. 복원추출한 두 값의 평균이 4일 확률은 $4/9$이다.

사용 과정

아직 모르는 확률을 $\mathrm{P}(\mathrm{X}=a)=r$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}=b)=1-r$라 두자. 두 값 모두 실제로 나타나므로 $0<r<1$이고, 평균은 두 값 사이여서 $a<5<b$이다.

두 표본의 평균은 a, $(a+b)/2$, b의 세 값 중 하나이다. $b>5$이므로 $b=4$는 불가능하다.

결과 · 다음 연결

검사할 경우는 $a=4$와 $a+b=8$의 두 가지이다. 두 경우는 $a<b$ 때문에 동시에 성립하지 않는다.

확률과 통계 29번 해설

R2. 평균 4가 작은 값 a인 경우를 분산으로 제외한다

조건

첫 경우는 $a=4$이다. 두 표본은 복원추출하므로 서로 독립이다.

사용 과정

두 값이 모두 a일 때만 평균이 4이다. 따라서 $r^2=4/9$이고 $r>0$이므로 $r=2/3$이다.

평균 조건 $4(2/3)+b(1/3)=5$에서 $b=7$이다. 분산을 평균 5에서의 편차로 계산하면 $(4-5)^2(2/3)+(7-5)^2(1/3)=2$이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{V(X)}>4$에 어긋나므로 이 경우는 제외한다. 확률 조건만 맞는 후보를 정답으로 채택하지 않는다.

R3. 평균 4가 두 값의 중간값인 경우에 모집단을 결정한다

조건

남은 경우는 $a+b=8$이다. 한 번은 a, 한 번은 b를 뽑아야 평균이 4가 된다.

사용 과정

가능한 순서는 (a,b)와 (b,a) 두 가지이다. 따라서 $2r(1-r)=4/9$이고, $9r^2-9r+2=0$에서 $r=1/3$ 또는 $2/3$이다.

$r=1/3$이면 평균 조건은 $a+2b=15$이다. $a+b=8$과 빼면 $b=7$, 따라서 $a=1$이다.

$r=2/3$이면 $2a+b=15$이다. $a+b=8$과 빼면 $a=7$, $b=1$이어서 $a<b$에 어긋난다.

남은 후보의 분산은 $(1-5)^2(1/3)+(7-5)^2(2/3)=8>4$이다. 두 값도 자연수이며 순서 조건을 만족한다.

결과 · 다음 연결

모집단은 $\mathrm{P(X=1)=1/3}$, $\mathrm{P(X=7)=2/3}$으로 결정된다. 이를 크기 3인 표본에 사용한다.

확률과 통계 29번 해설

R4. 세 번의 추출에서 목표 표본평균의 확률을 구한다

조건

세 번의 독립 복원추출에서 평균이 3이려면 합이 9이어야 한다.

사용 과정

7을 뽑은 횟수를 j라 하면 나머지 $3-j$개는 1이다. 합은 $7j+(3-j)=3+6j$이므로 $j=1$이어야 한다.

7을 뽑을 위치는 ${}_3\mathrm{C}_1$가지이고 각 순서의 확률은 $(2/3)(1/3)^2$이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{Y}}=3)=2/9$이다. 이는 기약분수이므로 $p=9$, $q=2$, $p+q=11$이다.

30번 | 정답 653 | 4점

R1. 최종 위치에서 세 이동의 횟수 후보를 구한다

조건

한 번의 이동은 +1, -1, +2이고 총 여섯 번 뒤 좌표가 2이다.

사용 과정

+1 이동을 U, -1 이동을 D, +2 이동을 V라 쓰자. 각 이동에 대응하는 주사위 눈은 각각 3개, 2개, 1개이다. 세 이동의 횟수를 u, d, v라 두면 음이 아닌 정수이다.

총 시행 수는 $u+d+v=6$, 최종 변위는 $u-d+2v=2$이다. d를 제거하면 $2u+3v=8$이다. $0\le v\le 2$이고 좌변의 짝홀에서 v는 짝수이므로 $v=0$ 또는 2이다.

결과 · 다음 연결

가능한 횟수는 $(u,d,v)=(4,2,0)$ 또는 $(1,3,2)$이다. 각 후보의 순서와 실제 주사위 결과 수를 따로 센다.

R2. 조건부확률의 분모가 되는 모든 주사위 결과를 센다

조건

조건은 마지막 좌표가 2라는 것이며, 아직 중간 위치 조건은 적용하지 않는다. 여섯 번의 공정한 주사위 결과는 각각 같은 확률 $1/6^6$이다.

사용 과정

$(4,2,0)$의 이동 순서는 $6!/(4!\,2!\,) = 15$개이다. 각 순서에서 U마다 눈 3개, D마다 눈 2개를 고를 수 있으므로 실제 결과는 순서당 $3^4 2^2 = 324$개이다.

$(1,3,2)$의 이동 순서는 $6!/(1!\,3!\,2!\,) = 60$개이다. 실제 결과는 순서당 $3 \times 2^3 = 24$개이다.

결과 · 다음 연결

분모에 해당하는 결과 수는 $15 \times 324 + 60 \times 24 = 6300$개이다. 이동 순서는 두 후보에서 확률이 다르므로 순서 수만 더하지 않는다.

R3. U 네 번, D 두 번의 허용 순서를 센다

조건

매 순간 좌표가 0 이상이며 1~5번째 중 원점에 돌아와야 한다. 이 경우 V는 없다.

사용 과정

원점으로 처음 돌아온 시점으로 나누면 같은 경로를 중복해서 세지 않는다. 돌아오려면 U와 D의 수가 같고 D가 총 두 번이므로 첫 귀환은 두 번째 또는 네 번째이다.

두 번째에 처음 돌아오면 앞부분은 UD이다. 남은 U 세 번과 D 한 번 중 시작부터 음수가 되지 않는 순서는 UUUD, UUDU, UDUU의 3개이다. DUUU는 바로 음수가 되어 제외한다.

네 번째에 처음 돌아오면 앞 네 이동은 UUDD이다. UDUD는 두 번째에 이미 돌아왔으므로 이 경우에 넣지 않는다. 뒤의 두 이동은 UU로 정해진다.

결과 · 다음 연결

허용되는 이동 순서는 $3 + 1 = 4$개이고, 각각 실제 주사위 결과 324개에 대응한다.

R4. U 한 번, D 세 번, V 두 번의 허용 순서를 센다

조건

이 후보에서도 처음 원점으로 돌아온 시점을 기준으로 나눈다. 그 앞부분에 사용한 횟수를 u_0, d_0, v_0라 쓰자.

확률과 통계 30번 해설

사용 과정

귀환 조건은 $d_0 = u_0 + 2v_0$이고 $u_0 \le 1$, $d_0 \le 3$, $v_0 \le 2$이다. 비어 있지 않은 가능한 앞부분의 횟수는 $(1,1,0)$, $(0,2,1)$, $(1,3,1)$뿐이므로 첫 귀환은 두 번째, 세 번째, 다섯 번째이다.

두 번째 귀환의 앞부분은 UD이다. 남은 D,D,V,V의 허용 순서는 VVDD, VDVD, VDDV의 3개이다. D로 시작하면 음수가 되고, 첫 V 다음에 D가 두 번 나오는 VDDV는 0까지만 내려가므로 허용된다.

세 번째 귀환의 앞부분은 VDD이다. 남은 U,D,V의 허용 순서는 UDV, UVD, VUD, VDU의 4개이다. D로 시작하는 두 순서는 음수가 되어 제외한다.

다섯 번째에 처음 귀환하려면 처음 네 순간의 좌표가 모두 양수여야 한다. U,V,D,D,D를 이 조건으로 배열하면 UVDDD, VUDDD, VDUDD의 3개이다. U 다음에 D를 놓으면 두 번째에 귀환하고, V 다음에 DD를 놓으면 세 번째에 귀환하므로 제외된다. 마지막 여섯 번째 이동은 남은 V이다.

결과 · 다음 연결

허용 순서는 $3+4+3=10$개이고, 각각 실제 주사위 결과 24개에 대응한다.

R5. 같은 확률을 갖는 실제 결과 수로 나눈다

조건

최종 좌표가 2인 전체 결과는 6300개이며, 두 중간 조건을 만족하는 이동 순서는 후보별로 4개와 10개이다.

사용 과정

각 후보의 주사위 결과 수를 곱해 합하면 분자는 $4\times 324 + 10\times 24 = 1536$개이다. 분자와 분모의 각 결과가 모두 같은 확률이므로 결과 수의 비로 조건부확률을 구한다.

결과 · 다음 연결

확률은 $1536/6300 = 128/525$이다. 기약분수의 분모 $p=525$, 분자 $q=128$이므로 $p+q=653$이다.

미적분 해설

23번 | 정답 ④ | 2점

R1. 분자와 분모를 같은 기준으로 정리하기

조건

분자와 분모에 3^n이 있고, 나머지 항은 상수 또는 2^n이다. n이 커질 때 각 항이 3^n에 비해 얼마나 커지는지 비교한다.

사용 과정

$3^n > 0$이므로 분자와 분모를 모두 3^n으로 나눈다. 주어진 식은 $\frac{2+4(1/3)^n}{1+(2/3)^n}$으로 바뀐다.

결과 · 다음 연결

증가하는 거듭제곱끼리의 비가 공비가 1보다 작은 등비수열로 바뀌었다. 이제 각각의 극한을 적용할 수 있다.

R2. 분모의 극한을 확인하고 값을 구하기

조건

$0 < 1/3 < 1$이고 $0 < 2/3 < 1$이므로 $(1/3)^n$과 $(2/3)^n$은 모두 0으로 수렴한다.

사용 과정

정리한 식의 분자는 2, 분모는 1로 수렴한다. 분모의 극한이 0이 아니므로 분자와 분모의 극한의 비를 구한다.

결과 · 다음 연결

구하는 극한은 $2/1 = 2$이다.

미적분 24번 해설

24번 | 정답 ③ | 3점

R1. 함숫값과 극한 조건으로 계수 정하기

조건

$f(x)=(x^2+ax+b)e^x$, $f(0)=1$이며, 차분을 포함한 극한의 값이 3이다. 접선을 구하려면 먼저 아직 모르는 계수 a, b를 정해야 한다.

사용 과정

$x=0$을 함수식에 넣으면 $b=1$이다. 주어진 극한의 식은 $\frac{f(x)-f(0)}{x}\cdot\frac{1}{f(x)}$로 나눠 쓸 수 있다. f는 미분가능하고 $f(0)=1\neq 0$이므로 그 극한은 $f'(0)/f(0)$이다.

곱의 미분법으로 $f'(x)=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$이다. 따라서 $f'(0)=a+b=3$이고, $b=1$을 함께 사용하면 $a=2$이다.

결과 · 다음 연결

함수식이 $f(x)=(x+1)^2e^x$로 정해졌다. 이 식에서 접점의 높이와 접선의 기울기를 계산한다.

R2. 접점과 기울기로 접선의 절편 구하기

조건

접점의 x좌표는 1이고, R1에서 함수식이 정해졌다. 접선에는 접점 $(1, f(1))$과 기울기 $f'(1)$이 필요하다.

사용 과정

$f(1)=4e$이고 $f'(1)=\{2(1+1)+(1+1)^2\}e=8e$이다. 점과 기울기를 접선식에 넣으면 $y-4e=8e(x-1)$이다.

결과 · 다음 연결

접선은 $y=8ex-4e$이므로 y절편은 $-4e$이다.

25번 | 정답 ④ | 3점

R1. 코사인값으로 치환하고 적분 구간 옮기기

조건

절댓값 안에는 $\cos x$만 있고, 그 밖에는 $\sin x\,dx$가 곱해져 있다. 코사인의 미분이 사인의 부호를 바꾼 것이므로 코사인값을 새 변수로 삼는다.

사용 과정

$u=\cos x$로 놓으면 $du=-\sin x\,dx$이다. $x=0$에서 $u=1$, $x=\pi$에서 $u=-1$이다. 미분에서 생긴 음수를 적분 순서 변경에 사용한다.

결과 · 다음 연결

구하는 값은 $\int_{-1}^{1}|\,u^2+u/2-1/2|\,du$이다. 이제 다항식의 부호를 확인해 절댓값을 벗긴다.

R2. 절댓값 안의 부호로 경우 나누기

조건

적분 구간은 $[-1,1]$이고, 절댓값 안은 $u^2+u/2-1/2$이다. 이 식의 부호가 바뀌면 적분할 식도 달라진다.

사용 과정

$u^2+u/2-1/2=(u-1/2)(u+1)$로 인수분해한다. $-1\le u\le 1/2$에서는 곱이 0 이하이고, $1/2\le u\le 1$에서는 0 이상이다.

결과 · 다음 연결

$u=-1$은 끝점이고 $u=1/2$만 내부의 부호 경계이다. 앞 구간에서는 다항식에 음수를 붙이고, 뒤 구간에서는 그대로 적분한다.

미적분 25번 해설

R3. 두 구간의 넓이를 더하기

조건

R2에서 절댓값을 벗기는 두 식과 구간을 정했다. $\mathrm{P}(u)=u^3/3+u^2/4-u/2$를 다항식의 원시함수로 사용한다.

사용 과정

앞 구간의 값은 $-\{\mathrm{P}(1/2)-\mathrm{P}(-1)\}$이고, 뒤 구간의 값은 $\mathrm{P}(1)-\mathrm{P}(1/2)$이다. 두 값을 더하면 $\mathrm{P}(-1)+\mathrm{P}(1)-2\mathrm{P}(1/2)$이다.

$\mathrm{P}(-1)=5/12$, $\mathrm{P}(1)=1/12$, $\mathrm{P}(1/2)=-7/48$을 넣는다.

결과 · 다음 연결

적분값은 $5/12+1/12-2(-7/48)=19/24$이다.

26번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 역함수의 값이 가리키는 원래 입력 찾기

조건

$f(x)=x^2+\ln x$의 정의역은 $x>0$이고 g는 그 역함수이다. h를 미분한 뒤 값을 대입하려면 먼저 $g(2x+1)$의 값을 알아야 한다.

사용 과정

$f'(x)=2x+1/x>0$이므로 f는 증가한다. 또한 $x\to 0+$에서 $f(x)\to-\infty$, $x\to\infty$에서 $f(x)\to\infty$이므로 g는 모든 실수에서 정의되고 값은 양수이다. 따라서 $\ln g(2x+1)$도 정의된다.

문제에서 값을 구하라는 입력을 $x_0=(3+\ln 2)/2$라 쓰면 $2x_0+1=4+\ln 2$이다. $f(2)=4+\ln 2$이므로 역함수의 대응에 따라 $g(2x_0+1)=2$이다.

결과 · 다음 연결

역함수에 들어가는 값이 원래 함수의 입력 2에 대응함을 알았다. 역함수의 미분계수도 $f'(2)$로 계산한다.

미적분 26번 해설

R2. 역함수 미분과 합성함수 미분 연결하기

조건

R1에서 $g(2x_0+1)=2$를 얻었고, $f'(2)=4+1/2=9/2\neq 0$이다.

사용 과정

$f(g(y))=y$를 미분하면 $f'(g(y))g'(y)=1$이다. 따라서 $g'(2x_0+1)=1/f'(2)=2/9$이다.

$h(x)=\ln g(2x+1)$에서 로그의 미분과 안쪽 함수의 미분을 차례로 적용하면 $h'(x)=2g'(2x+1)/g(2x+1)$이다.

결과 · 다음 연결

$h'(x_0)=2(2/9)/2=2/9$이다. 분모의 역함수 값과 분자의 역함수 미분계수에 같은 대응을 사용했다.

27번 | 정답 ② | 3점

R1. 극값 조건으로 두 계수의 관계 만들기

조건

$f(x)=ax^2+b\ln x$는 $x>0$에서 미분가능하고, 정의역 내부인 $x=2$에서 극값을 갖는다. 따라서 이 점의 미분계수는 0이다.

사용 과정

$f'(x)=2ax+b/x$이므로 $f'(2)=4a+b/2=0$이다.

결과 · 다음 연결

$b=-8a$를 얻었다. 이 관계만으로 계수가 확정되지는 않으므로 접선 위의 점 조건을 함께 사용한다.

미적분 27번 해설

R2. 접선의 통과점을 이용해 계수 확정하기

조건

접점의 x좌표는 4이고 접선은 $(0,\,-1-2\ln 2)$를 지난다. 주어진 점은 곡선 위의 접점이 아니라 접선 위의 점이다.

사용 과정

접선식은 $y-f(4)=f'(4)(x-4)$이다. 통과점의 좌표를 넣으면 $f(4)-4f'(4)=-1-2\ln 2$이다.

$f(4)=16a+b\ln 4$, $f'(4)=8a+b/4$이므로 왼쪽은 $-16a+b(\ln 4-1)$이다. 여기에 $b=-8a$, $\ln 4=2\ln 2$를 넣으면 $-8a(1+2\ln 2)=-(1+2\ln 2)$이다.

결과 · 다음 연결

$1+2\ln 2>0$이므로 $a=1/8$, $b=-1$이다. 따라서 길이 계산에 필요한 도함수는 $f'(x)=x/4-1/x$로 정해진다.

R3. 길이 공식의 제곱근을 부호와 함께 정리하기

조건

R2에서 얻은 도함수와 길이를 구할 구간 $2\le x\le 4$를 사용한다. 먼저 $f'(x)=(x^2-4)/(4x)$는 $x=2$의 왼쪽에서 음수, 오른쪽에서 양수이므로 원래의 극값 조건도 만족한다.

사용 과정

곡선의 길이는 $\int_2^4\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$이다. 제곱을 전개하면 $1+(x/4-1/x)^2=x^2/16+1/2+1/x^2$이고, 이는 $(x/4+1/x)^2$과 같다.

결과 · 다음 연결

적분 구간에서 $x/4+1/x>0$이므로 제곱근은 $x/4+1/x$이다. 절댓값을 벗길 부호까지 확인했으므로 바로 적분할 수 있다.

미적분 27번 해설

R4. 정리된 식을 적분해 길이 구하기

조건

길이의 피적분함수는 $x/4+1/x$이고 양 끝점은 2, 4이다.

사용 과정

원시함수는 $x^2/8+\ln x$이다. 끝점을 대입하면 $(2+\ln 4)-(1/2+\ln 2)$이다.

결과 · 다음 연결

곡선의 길이는 $3/2+\ln 2$이다.

28번 | 정답 ② | 4점

R1. 같은 높이와 교점의 비로 두 교점 정하기

조건

두 교점의 x좌표 α, β는 아직 모르는 값이며 $f(\alpha)=f(\beta)$, $\beta=2\alpha$를 만족한다. 계산을 줄이기 위해 알려진 상수 $\ln 2$를 L이라 쓴다.

사용 과정

$\alpha-\ln\alpha=\beta-\ln\beta$를 정리하면 $\beta-\alpha=\ln(\beta/\alpha)=\mathrm{L}$이다. 여기에 $\beta=2\alpha$를 넣으면 $\alpha=\mathrm{L}$, $\beta=2\mathrm{L}$이다.

$\mathrm{L}=\int_1^2(1/x)\,dx$이고 이 구간 내부에서 $1/2<1/x<1$이므로 $1/2<\mathrm{L}<1$이다. 한편 $f'(x)=1-1/x$이므로 f는 $(0,1)$에서 감소하고 $(1,\infty)$에서 증가한다.

결과 · 다음 연결

두 교점은 $\mathrm{L}<1<2\mathrm{L}$로 서로 다른 단조 구간에 놓인다. 이 교점들의 변화율을 각각 구해 넓이의 변화율과 연결한다.

R2. 높이를 입력으로 하는 넓이 함수 만들기

조건

문제의 g는 넓이를 넣으면 높이를 주는 함수이다. 넓이의 적분식을 먼저 쓰기 위해, 반대로 높이 $k>1$을 넣으면 넓이를 주는 함수 $\mathrm{A}(k)$를 정의한다.

미적분 28번 해설

사용 과정

높이 k에서의 두 교점의 x좌표를 $u(k) < 1 < v(k)$라 하자. u, v는 높이에 따라 변하는 값이고, R1의 α, β는 특정 높이에서의 값이다.

두 교점 사이에서는 직선이 곡선보다 위에 있으므로 $\mathrm{A}(k) = \int_{u(k)}^{v(k)} \{k - f(x)\}\,dx$이다. $\mathrm{F}'(x) = f(x)$인 원시함수 F를 사용해 $\mathrm{A}(k) = k\{v(k) - u(k)\} - \mathrm{F}(v(k)) + \mathrm{F}(u(k))$로 쓴다.

결과 · 다음 연결

적분 구간이 변하는 넓이를 보통의 합성함수 식으로 나타냈다. 이제 곱의 미분과 합성함수 미분으로 A', A''을 구한다.

R3. 교점 조건으로 넓이 미분식의 항 소거하기

조건

교점은 항상 $f(u(k)) = f(v(k)) = k$를 만족한다. 아래에서 u, v, u', v'는 모두 같은 k에서의 값이다.

사용 과정

R2의 식을 미분하면 $\mathrm{A}'(k) = (v - u) + k(v' - u') - f(v)v' + f(u)u'$이다. 교점 조건을 넣으면 뒤의 세 항은 $k(v' - u') - kv' + ku' = 0$이 된다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{A}'(k) = v(k) - u(k)$이고, 한 번 더 미분하면 $\mathrm{A}''(k) = v'(k) - u'(k)$이다. 넓이의 미분을 교점 사이 거리와 교점의 변화율로 바꾸었다.

R4. 두 교점의 변화율을 구하고 해당 높이에 대입하기

조건

$f(u(k)) = k$와 $f(v(k)) = k$이며 두 교점은 $x = 1$이 아니다. 따라서 그 점들에서 f'은 0이 아니므로 변화율을 나눠 구할 수 있다.

사용 과정

두 식을 각각 미분하면 $f'(u(k))u'(k) = 1$, $f'(v(k))v'(k) = 1$이다. 따라서 $u'(k) = u(k)/(u(k) - 1)$, $v'(k) = v(k)/(v(k) - 1)$이다.

문제의 넓이가 c일 때 높이를 $k_0 = g(c)$라 쓰자. R1에서 $u(k_0) = \mathrm{L}$, $v(k_0) = 2\mathrm{L}$이므로 $\mathrm{A}'(k_0) = \mathrm{L}$이다. 또한 $\mathrm{A}''(k_0) = 2\mathrm{L}/(2\mathrm{L} - 1) - \mathrm{L}/(\mathrm{L} - 1)$이다.

미적분 28번 해설

결과 · 다음 연결

통분하면 $\mathrm{A}'(k_0) = \mathrm{L}/\{(2\mathrm{L}-1)(1-\mathrm{L})\}$이다. 왼쪽 교점의 변화율은 음수이므로 이를 빼는 부호를 유지해야 한다. 이제 높이 함수 g의 미분으로 되돌린다.

R5. 넓이와 높이의 역대응을 두 번 미분하기

조건

넓이 s에 대응하는 높이가 $g(s)$이므로 $\mathrm{A}(g(s)) = s$이다. 또한 $\mathrm{A}'(k) > 0$이므로 아래에서 이 값으로 나눌 수 있다.

사용 과정

한 번 미분하면 $\mathrm{A}'(g(s))g'(s) = 1$이므로 $g'(s) = 1/\mathrm{A}'(g(s))$이다. 이 곱의 식을 다시 미분한다.

$\mathrm{A}''(g(s))\{g'(s)\}^2 + \mathrm{A}'(g(s))g''(s) = 0$이다. $s = c$를 넣고 $g'(c) = 1/\mathrm{A}'(k_0)$를 대입하면 $g''(c) = -\mathrm{A}''(k_0)/\{\mathrm{A}'(k_0)\}^3$이다.

결과 · 다음 연결

R4의 두 값을 사용하면 $g''(c) = -1/\{\mathrm{L}^2(2\mathrm{L}-1)(1-\mathrm{L})\}$이다. 여기에 $\mathrm{L}^2 = (\ln 2)^2$을 곱하므로 답은 $-1/\{(1-\ln 2)(2\ln 2 - 1)\}$이다.

29번 | 정답 48 | 4점

R1. 한 구간씩 옮겼을 때 최댓값의 비 찾기

조건

a_n은 $[(n-1)\pi, n\pi]$에서 $|f(x)|$의 최댓값이다. 각 구간은 바로 앞 구간을 오른쪽으로 π만큼 옮긴 것이다.

사용 과정

$|\sin(x+\pi)| = |\sin x|$이므로 $|f(x+\pi)| = e^{-k\pi}|f(x)|$이다. 이 양의 배수는 구간 안의 모든 점에 동일하게 적용되므로 최댓값도 같은 비율로 바뀐다.

아직 모르는 첫 항을 $\mathrm{A} = a_1$, 공비를 $q = e^{-k\pi}$라 쓰면 $\mathrm{A} > 0$, $q > 0$이고 $a_n = \mathrm{A}q^{n-1}$이다. 급수의 합이 유한한 12이므로 $0 < q < 1$이어야 한다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{A}/(1-q) = 12$, 즉 $\mathrm{A} = 12(1-q)$이다. $k > 0$도 뒤따르지만 목표 급수에는 A, q만 필요하다. 각 구간의 극대점을 직접 구할 필요는 없다.

미적분 29번 해설

R2. 값이 1로 바뀌는 항의 개수 정하기

조건

a_n은 양수이며 감소해 0으로 수렴한다. b_n은 $a_n \ge 1$일 때만 값이 1로 바뀌므로, 이 경계를 기준으로 급수를 나눈다.

사용 과정

만약 $\mathrm{A} < 1$이면 모든 $b_n = a_n$이어서 두 급수의 합이 같아진다. 이는 $12 \neq 9/2$와 모순이므로 $\mathrm{A} \ge 1$이다. $a_n \ge 1$인 항의 개수를 아직 모르는 양의 정수 m이라 두면, 경계 조건은 $\mathrm{A}q^{m-1} \ge 1$과 $\mathrm{A}q^{m} < 1$이다.

첫 m개의 b_n은 1이고 나머지는 원래 등비수열이다. 따라서
$9/2 = m + \mathrm{A}q^m/(1-q) = m + 12q^m$이다.

결과 · 다음 연결

뒤의 꼬리합이 양수이므로 $m < 9/2$이다. 가능한 m은 $1, 2, 3, 4$이며, 각 후보에서 얻은 q를 경계 조건에 다시 넣어야 한다.

R3. 후보가 실제 항의 경계를 만족하는지 검사하기

조건

R2의 합 식과 $a_m \ge 1$, $a_{m+1} < 1$이 동시에 성립해야 한다. 합 식만 만족하는 후보를 그대로 채택하지 않는다.

사용 과정

$m = 1$이면 $q = 7/24$이다. 그런데 $a_2 = 12(1-q)q = 119/48 > 1$이므로 첫 항 하나만 1 이상이라는 가정과 모순이다.

$m = 2$이면 $q^2 = 5/24 < 1/4$이므로 $q < 1/2$이다. 그러면 $a_3 = (5/2)(1-q) > 5/4 > 1$이므로 세 번째 항도 1 이상이 되어 제외한다.

$m = 4$이면 $q^4 = 1/24 > 1/81$이므로 $q > 1/3$이다. $a_4 = 12(1-q)q^3 = (1-q)/(2q) < 1$이므로 네 번째 항까지 1 이상이라는 가정과 모순이다.

남은 $m = 3$에서는 $q^3 = 1/8$, 즉 $q = 1/2$이고 $\mathrm{A} = 6$이다. 실제로 $a_3 = 3/2 \ge 1$, $a_4 = 3/4 < 1$이며, 두 급수의 합도 각각 12와 $3 + 12(1/2)^3 = 9/2$이다.

결과 · 다음 연결

허용되는 수열은 $a_n = 6(1/2)^{n-1}$이다. 경계의 등호는 앞쪽에 포함했으며, 이를 만족하는 항 개수도 확인했다.

미적분 29번 해설

R4. 항을 제곱한 급수의 합 구하기

조건

첫 항 $\mathrm{A}=6$, 공비 $q=1/2$가 정해졌다. 물음은 원래 항의 합이 아니라 제곱한 항들의 합이다.

사용 과정

$a_n^2 = 36(1/4)^{n-1}$이므로 첫 항은 36, 공비는 $1/4$인 등비급수이다. 공비가 1보다 작으므로 합은 $36/(1-1/4)$이다.

결과 · 다음 연결

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 48$이다.

30번 | 정답 60 | 4점

R1. 기본 함수의 그래프에서 한 높이의 실근 수 구하기

조건

$f(x)=x^2e^{2-x}$이다. 합성방정식의 실근을 세려면 먼저 $f(x)=y$가 높이 y마다 몇 개의 해를 가지는지 알아야 한다.

사용 과정

$f'(x)=x(2-x)e^{2-x}$이고 지수 인자는 항상 양수이다. 따라서 f는 $(-\infty,0)$에서 감소, $(0,2)$에서 증가, $(2,\infty)$에서 감소한다.

$f(0)=0$, $f(2)=4$이고, 왼쪽 끝에서는 $f(x)\to\infty$, 오른쪽 끝에서는 $f(x)\to 0$이다. 오른쪽에서는 0에 가까워질 뿐, 추가로 0이 되지는 않는다.

결과 · 다음 연결

$f(x)=y$의 서로 다른 실근 수를 $\mathrm{N}(y)$라 하면, $y<0$에서 0, $y=0$에서 1, $0<y<4$에서 3, $y=4$에서 2, $y>4$에서 1이다. $y=4$에서는 두 양의 가지가 만나는 $x=2$를 한 번만 센다.

미적분 30번 해설

R2. 합성방정식을 중간 입력과 원래 입력으로 나누기

조건

목표 방정식은 $f(f(x)-1)=t$이고, R1에서 f의 치역은 $[0,\infty)$임을 알았다.

사용 과정

바깥 함수에 들어가는 값을 $u=f(x)-1$로 놓으면 $u\ge -1$이다. 먼저 이 범위에서 $f(u)=t$를 풀고, 얻은 각각의 u에 대해 $f(x)=u+1$의 실근 수 $\mathrm{N}(u+1)$을 더한다.

u가 $[-1,0]$에서 움직이면 $f(u)$는 e^3에서 0까지 감소한다. $[0,2]$에서는 0에서 4까지 증가하고, $(2,\infty)$에서는 4에서 0으로 감소한다.

결과 · 다음 연결

중간값 u의 개수만 세어서는 원래 x의 개수가 되지 않는다. 서로 다른 u는 서로 다른 $f(x)$값을 요구하므로, 각 $\mathrm{N}(u+1)$을 더해도 서로 중복되는 x는 없다.

R3. 세 중간값이 생기는 구간에서 개수 변화 찾기

조건

$0<t<4$이면 허용 범위에서 $f(u)=t$의 해가 세 개이다. 각각을 $u_-\in(-1,0)$, $u_1\in(0,2)$, $u_2\in(2,\infty)$라 쓴다.

사용 과정

$u_-+1\in(0,1)$, $u_1+1\in(1,3)$이므로 앞의 두 중간값은 R1에 따라 각각 x의 실근 3개를 만든다. 마지막 중간값에서는 u_2+1이 4를 지나는지가 핵심이다.

$u_2+1=4$는 $u_2=3$이고 이때 $t=f(3)=9/e$이다. f가 $(2,\infty)$에서 감소하므로 $0<t<9/e$에서는 $u_2>3$, $9/e<t<4$에서는 $2<u_2<3$이다.

결과 · 다음 연결

$0<t<9/e$이면 $g(t)=3+3+1=7$이다. $t=9/e$이면 $g(t)=3+3+2=8$이고, $9/e<t<4$이면 $g(t)=3+3+3=9$이다. 중간값의 개수가 그대로여도 그 값에서 돌아가는 실근 수가 달라진다.

R4. 끝점과 나머지 구간에서 빠진 실근 확인하기

조건

R3은 열린 구간 $0<t<4$만 다뤘다. 나머지 높이와 경계 0, 4, e^3에서는 중간값의 개수나 위치가 달라지므로 별도로 센다.

미적분 30번 해설

사용 과정

$t<0$이면 $f(u)\geq 0$이므로 해가 없다. $t=0$이면 $u=0$뿐이고 $f(x)=1$의 실근은 3개이므로 $g(0)=3$이다.

$t=4$이면 음수인 중간값 하나와 $u=2$가 있다. 음수 중간값에서는 $0<u+1<1$이므로 3개, $u=2$에서는 $f(x)=3$이므로 3개이다. 따라서 $g(4)=6$이다. 이때 두 양의 가지의 공통점 $u=2$는 한 번만 센다.

$4<t<e^3$이면 음수인 중간값 하나만 남고 $0<u+1<1$이므로 $g(t)=3$이다. $t=e^3$이면 $u=-1$뿐이므로 $f(x)=0$에서 $g(e^3)=1$이다. $t>e^3$이면 허용되는 중간값이 없어 $g(t)=0$이다.

결과 · 다음 연결

각 열린 구간에서 g는 상수이고, 값이 바뀌는 경계는 정확히 0, $9/e$, 4, e^3이다.
$9/e=f(3)<f(2)=4<e^3$이므로 순서대로 $a=0$, $b=9/e$, $c=4$, $d=e^3$이다.

R5. 경계에서의 함수값을 목표식에 넣기

조건

불연속점 $b=9/e$, $c=4$, $d=e^3$를 정했다. 목표에는 좌우 극한이 아니라 경계에서의 실제 함수값 $g(b)$, $g(c)$가 필요하다.

사용 과정

R3과 R4에서 직접 센 값 $g(b)=8$, $g(c)=6$을 사용한다. 또한 $eb=9$이고 $\ln d=3$이다.

결과 · 다음 연결

구하는 값은 $8\cdot 6+9+3=60$이다.

기하 해설

23번 | 정답 ② | 2점

R1. 수선의 발을 정하고 좌표의 차로 거리를 구한다

조건

$\mathrm{A}(2,-1,3)$에서 z축에 수선을 내린다. z축 위의 점은 $x=y=0$이다.

사용 과정

수선은 z축 방향과 수직이므로 A와 수선의 발 H는 같은 높이를 갖는다. 따라서 $\mathrm{H}=(0,0,3)$이다.

두 점 사이 거리 공식에 좌표 차를 넣으면 $\mathrm{AH}^2=(2-0)^2+(-1-0)^2+(3-3)^2=5$이다.

결과 · 다음 연결

길이는 양수이므로 $\mathrm{AH}=\sqrt{5}$이다.

24번 | 정답 ④ | 3점

R1. 주어진 두 내적을 합쳐 AC의 길이를 구한다

조건

$2\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$이고, 오른쪽 두 벡터와 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$의 내적 값이 각각 10, 6으로 주어졌다.

사용 과정

두 값을 사용하려면 벡터 관계의 양변에 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$를 내적하면 된다. 내적의 분배법칙과 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$에서 $2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=10+6=16$이다.

결과 · 다음 연결

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=8$이다. 이제 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$의 길이 및 서로의 내적을 모두 알고 있다.

기하 24번 해설

R2. 목표 BD를 알고 있는 두 벡터의 차로 나타낸다

조건

$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$이고, $|\overrightarrow{AD}|^2=13$, $|\overrightarrow{AC}|^2=8$, $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=6$이다.

사용 과정

시점을 A로 맞추면 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$이다. 앞의 벡터 관계를 넣어 $\overrightarrow{BD}=2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})$를 얻는다.

차 벡터의 길이 제곱을 전개하면 $BD^2=4(13+8-2\times6)=36$이다. 두 벡터가 수직이라고 가정하지 않고 주어진 내적 6을 사용한다.

결과 · 다음 연결

선분의 길이이므로 $BD=6$이다.

25번 | 정답 ② | 3점

R1. 접선의 통과점을 넣어 접점의 y좌표를 구한다

조건

접점 P는 쌍곡선 위의 제1사분면 점이고, 그 접선은 $(0,-3)$을 지난다.

사용 과정

모르는 접점 좌표를 $P=(u,v)$라 두면 $u>0$, $v>0$이다. 쌍곡선 $x^2/9-y^2/16=1$의 이 점에서의 접선은 $ux/9-vy/16=1$이다.

$(0,-3)$은 접점이 아니라 접선 위의 점이다. 따라서 이 좌표는 접선식에 넣어 $3v/16=1$을 얻는다.

결과 · 다음 연결

$v=16/3$이다. 아직 모르는 u는 접점이 쌍곡선 위에 있다는 조건으로 구한다.

기하 25번 해설

R2. 곡선 위 조건과 초점 좌표를 결합한다

조건

$\mathrm{P}=(u,16/3)$는 쌍곡선 위에 있고 $u>0$이다. 목표는 양의 x축 쪽 초점 F까지의 거리이다.

사용 과정

곡선식에 넣으면 $u^2/9-(16/3)^2/16=1$이다. 따라서 $u^2/9-16/9=1$, $u^2=25$이고 $u=5$이다.

쌍곡선의 반초점거리, 즉 중심에서 초점까지의 거리를 c라 쓰면 $c^2=9+16=25$이다. 따라서 $\mathrm{F}=(5,0)$이다.

결과 · 다음 연결

P와 F의 x좌표가 같으므로 $\mathrm{PF}=|16/3-0|=16/3$이다.

26번 | 정답 ③ | 3점

R1. 포물선의 접선으로 첫 x절편을 정한다

조건

포물선 $y^2=4x$의 제1사분면 접선 l은 $\mathrm{A}(0,2)$를 지난다.

사용 과정

접선의 모르는 기울기를 s라 두자. 포물선 위 제1사분면 접점의 y좌표가 양수이므로 접선의 기울기도 양수이다. 기울기 s인 접선은 $y=sx+1/s$이다.

$\mathrm{A}(0,2)$를 넣으면 $1/s=2$이므로 $s=1/2$이다. $y=0$을 넣어 x절편을 구한다.

결과 · 다음 연결

l은 $y=x/2+2$이고 $\mathrm{B}=(-4,0)$이다. 이 점과 넓이 조건으로 다른 절편을 정한다.

기하 26번 해설

R2. 넓이와 접점의 사분면으로 다른 접선을 정한다

조건

A의 높이는 2, B = (−4, 0)이며 삼각형 ABC의 넓이는 6이다. 타원의 접점도 제1사분면이다.

사용 과정

타원의 접점을 (u, v)라 두면 $u, v > 0$이고 접선은 $ux/a^2 + vy = 1$이다. 따라서 기울기는 음수, x절편 a^2/u는 양수이다. 즉 C는 원점의 오른쪽에 있다.

밑변 BC는 x축 위에 있으므로 $6 = (1/2)\mathrm{BC} \times 2$에서 BC = 6이다. B의 x좌표 -4에서 오른쪽으로 6만큼 가면 C = (2, 0)이다.

결과 · 다음 연결

A(0, 2)와 C(2, 0)을 잇는 타원의 접선 m은 $y = -x + 2$이다.

R3. 중근 조건으로 타원의 크기와 초점거리를 구한다

조건

직선 $y = -x + 2$가 타원 $x^2/a^2 + y^2 = 1$에 접하고 $a > 1$이다.

사용 과정

직선을 대입하고 a^2를 곱하면 $(1 + a^2)x^2 - 4a^2x + 3a^2 = 0$이다. 접하므로 교점의 x좌표가 중근이고 판별식이 0이다.

판별식은 $16a^4 - 12a^2(1 + a^2) = 4a^2(a^2 - 3)$이다. $a > 1$이므로 $a^2 = 3$이다. 이때 접점은 $(3/2, 1/2)$이어서 제1사분면 조건도 만족한다.

타원의 장반경은 a, 단반경은 1이다. 중심에서 초점까지의 거리 c는 $c^2 = a^2 - 1 = 2$를 만족한다.

결과 · 다음 연결

두 초점은 중심의 양쪽에 있으므로 초점 사이 거리는 $2c = 2\sqrt{2}$이다.

기하 27번 해설

27번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 접힌 뒤에도 유지되는 길이로 수직 단면을 정한다

조건

정사각형의 한 변은 4이며 접는 선은 AC이다. D가 옮겨진 점이 P이다.

사용 과정

공간 높이와 평면 위치를 나누어 계산하려고 AC의 중점을 K, P의 평면 ABC 위 수선의 발을 H라 두자. 접어서 $\mathrm{AP}=\mathrm{CP}=4$가 유지된다.

이등변삼각형 APC에서 중선 PK는 AC와 수직이다. $\mathrm{AK}=\mathrm{AC}/2=2\sqrt{2}$이므로 $\mathrm{PK}^2=\mathrm{AP}^2-\mathrm{AK}^2=16-8=8$이다.

PH는 평면 전체에 수직이므로 AC와도 수직이다. PK를 평면에 사영한 KH도 AC와 수직이다. 정사각형에서 K를 지나 AC에 수직인 직선은 BD이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{PK}=2\sqrt{2}$이고 H는 직선 BD 위에 있다. 이를 정사영의 넓이와 연결해 H를 정한다.

R2. 정사영의 넓이로 평면 위 위치를 구한다

조건

삼각형 PAB의 정사영은 삼각형 HAB이고 그 넓이가 6이다.

사용 과정

길이를 그대로 보존하는 평면 좌표를 $\mathrm{A}=(0,0)$, $\mathrm{B}=(4,0)$, $\mathrm{C}=(4,4)$, $\mathrm{D}=(0,4)$로 놓자. $\mathrm{K}=(2,2)$이고 직선 BD는 $x+y=4$이다.

$\mathrm{H}=(x,y)$라 하면 $\mathrm{KH}\le\mathrm{PK}=2\sqrt{2}$이다. $\mathrm{KB}=\mathrm{KD}=2\sqrt{2}$이므로 H는 선분 BD 위에 있고 $0\le y\le 4$이다. 따라서 AB에 대한 높이는 $|y|=y$이다.

넓이 조건은 $(1/2)\times 4\times y=6$이므로 $y=3$이다. $x+y=4$에 넣으면 $x=1$이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{H}=(1,3)$이다. 부호 범위를 먼저 확인했으므로 $y=-3$을 별도 후보로 남길 필요가 없다.

기하 27번 해설

R3. 두 직각삼각형을 연결해 공간 거리를 구한다

조건

$\mathrm{K}=(2,2)$, $\mathrm{H}=(1,3)$, $\mathrm{PK}^2=8$이다. PH는 평면 ABC에 수직이다.

사용 과정

직각삼각형 PKH에서 $\mathrm{KH}^2=(2-1)^2+(2-3)^2=2$이므로 $\mathrm{PH}^2=8-2=6$이다.

평면에서 $\mathrm{BH}^2=(4-1)^2+(0-3)^2=18$이다. 이어 직각삼각형 BHP에 피타고라스 정리를 쓰면 $\mathrm{BP}^2=\mathrm{BH}^2+\mathrm{PH}^2=24$이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{BP}=2\sqrt{6}$이다. $\mathrm{PH}^2=6>0$이므로 P가 평면 위에 있지 않다는 조건도 만족한다.

28번 | 정답 ④ | 4점

R1. 내적의 곱이 0인 조건을 두 원의 합집합으로 바꾼다

조건

$\mathrm{P}=(x,y)$에서 두 내적의 곱이 0이고, 동시에 $y=kx+4$를 만족한다.

사용 과정

좌표 차로 내적하면 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-3-x)(3-x)+y^2=x^2+y^2-9$이다. 다른 내적은 $x^2+(-1-y)(5-y)=x^2+(y-2)^2-9$이다.

두 실수의 곱이 0이므로 적어도 한 내적이 0이다. 따라서 자취는 $\mathrm{C}_1: x^2+y^2=9$ 또는 $\mathrm{C}_2: x^2+(y-2)^2=9$이다.

결과 · 다음 연결

S_k는 직선 $l: y=kx+4$와 두 원의 합집합이 만나는 점들이다. 각 원의 교점을 센 뒤 두 원의 공통점에 생기는 중복을 빼야 한다.

R2. 중심과 직선 사이 거리로 교점 수가 바뀌는 경계를 구한다

조건

두 원의 반지름은 모두 3이다. 직선식은 $kx-y+4=0$이다.

기하 28번 해설

사용 과정

C_2의 중심 $(0,2)$에서 직선까지 거리는 $2/\sqrt{1+k^2} \le 2 < 3$이다. 그러므로 이 원에서는 항상 서로 다른 두 교점이 생긴다.

C_1의 중심 $(0,0)$에서의 거리는 $4/\sqrt{1+k^2}$이다. 이 거리를 반지름 3과 비교하면 접할 때 $16 = 9(1+k^2)$, 즉 $k^2 = 7/9$이다.

$k^2 < 7/9$이면 C_1의 교점은 0개, $k^2 = 7/9$이면 1개, $k^2 > 7/9$이면 2개이다.

결과 · 다음 연결

세 점을 만들 후보는 $1+2$개를 얻는 접선 경우와, $2+2$개 중 한 점이 중복되는 경우이다. 교점 0개인 경우는 제외된다.

R3. 두 원의 공통점으로 중복 여부를 검사한다

조건

서로 다른 점이 정확히 세 개여야 한다. 두 원의 공통점이 직선 위에 있으면 그 점을 한 번만 센다.

사용 과정

두 원의 식을 빼면 $y = 1$이다. 이를 $x^2 + y^2 = 9$에 넣으면 공통점은 $(2\sqrt{2}, 1)$, $(-2\sqrt{2}, 1)$이다.

직선 $y = kx + 4$가 이 중 한 점을 지나려면 $1 = \pm 2\sqrt{2}k + 4$이므로 $k = \pm 3/(2\sqrt{2})$, $k^2 = 9/8$이다.

접선 경우 $k^2 = 7/9$는 위 값과 다르므로 중복이 없고 정확히 세 점이다. 두 원 모두 두 점씩 만나는 경우에는 공통점 하나를 지나는 $k^2 = 9/8$에서 $2 + 2 - 1 = 3$개가 된다.

두 공통점을 모두 잇는 직선은 $y = 1$이다. y절편이 4인 l은 이 직선일 수 없으므로 두 점이 동시에 중복되는 경우는 없다.

결과 · 다음 연결

가능한 기울기는 $\pm\sqrt{7}/3$과 $\pm 3/(2\sqrt{2})$의 네 개이다.

기하 28번 해설

R4. 모든 기울기의 제곱을 합한다

조건

네 기울기 중 두 개의 제곱은 $7/9$, 나머지 두 개의 제곱은 $9/8$이다.

사용 과정

양수 · 음수 기울기는 서로 다른 실수이므로 각각 포함하여 $2(7/9)+2(9/8)$을 계산한다.

결과 · 다음 연결

제곱의 합은 $137/36$이다.

29번 | 정답 22 | 4점

R1. 공통 초점에서 거리의 합과 차를 얻는다

조건

$a>2$이며 P는 타원과 쌍곡선의 제1사분면 교점이다.

사용 과정

타원의 장반경을 $s=\sqrt{a^2+4}$라 두자. s는 아직 모르는 양이다. 타원의 반초점거리는 a, 쌍곡선의 반초점거리도 $\sqrt{4+(a^2-4)}=a$이므로 두 곡선은 초점 F,F'를 공유한다.

타원의 정의에서 $\mathrm{PF}+\mathrm{PF}'=2s$이다. 쌍곡선의 오른쪽 가지 위에서는 오른쪽 초점 F가 더 가까우므로 $\mathrm{PF}'-\mathrm{PF}=4$이다.

결과 · 다음 연결

두 식을 더하고 빼면 $\mathrm{PF}=s-2$, $\mathrm{PF}'=s+2$이다. 거리의 비 조건과 결합하여 s를 정한다.

R2. 거리와 x좌표의 관계를 만들어 분할비에 연결한다

조건

타원 위 임의의 점 $\mathrm{X}=(x,y)$에 대해 두 초점까지 거리의 합이 $2s$이다. $\mathrm{PF}=3\mathrm{FQ}$이며 F는 타원 내부에 있다.

사용 과정

거리의 제곱 차는 $(\mathrm{XF}')^2-\mathrm{XF}^2=(x+a)^2-(x-a)^2=4ax$이다. 이를 거리의 합 $2s$로 나누면 $\mathrm{XF}'-\mathrm{XF}=2ax/s$이다. 합과 차를 연립하면 $\mathrm{XF}=s-ax/s$를 얻는다.

기하 29번 해설

초점 F가 내부에 있으므로 직선의 두 교점 P,Q 사이에 F가 있다. $\mathrm{PF}:\mathrm{FQ}=3:1$이므로 내분점 공식에서 $\mathrm{F}=(\mathrm{P}+3\mathrm{Q})/4$이다. 특히 $x_{\mathrm{P}}+3x_{\mathrm{Q}}=4a$이다.

방금 만든 거리식을 P,Q에 적용하여 더하면 $\mathrm{PF}+3\mathrm{QF}=4s-(a/s)(x_{\mathrm{P}}+3x_{\mathrm{Q}})$이다. 따라서 이 값은 $4s-4a^2/s=16/s$이다. 마지막 등식에는 $s^2-a^2=4$를 썼다.

한편 $\mathrm{PF}=3\mathrm{QF}=s-2$이므로 같은 합은 $2(s-2)$이다. 따라서 $s(s-2)=8$, 즉 $(s-4)(s+2)=0$이다.

결과 · 다음 연결

$s>0$이므로 $s=4$, $a^2=s^2-4=12$이다. 이제 곡선의 계수가 숫자로 정해졌다.

R3. 두 접점의 좌표를 복원한다

조건

$a^2=12$이므로 두 곡선은 $x^2/16+y^2/4=1$, $x^2/4-y^2/8=1$이다. P는 제1사분면에 있다.

사용 과정

첫 식에 16, 둘째 식에 8을 곱하면 $x^2+4y^2=16$, $2x^2-y^2=8$이다. 둘째 식에서 $y^2=2x^2-8$을 첫 식에 넣어 $9x^2=48$을 얻는다.

따라서 $x^2=16/3$, $y^2=8/3$이다. 제1사분면 조건으로 양의 제곱근을 골라 $\mathrm{P}=(4\sqrt{3}/3,2\sqrt{6}/3)$이다.

$\mathrm{F}=(2\sqrt{3},0)$이고 $\mathrm{Q}=(4\mathrm{F}-\mathrm{P})/3$이므로 $\mathrm{Q}=(20\sqrt{3}/9,\,-2\sqrt{6}/9)$이다.

결과 · 다음 연결

두 접점 P,Q를 모두 얻었다. 이 좌표를 같은 타원의 접선 공식에 넣는다.

기하 29번 해설

R4. 두 접선을 연립하여 교점의 거리를 계산한다

조건

타원은 $x^2/16+y^2/4=1$이다. 그 위의 점 (u,v)에서 접선은 $ux/16+vy/4=1$이다.

사용 과정

P를 넣으면 $(\sqrt{3}/12)x+(\sqrt{6}/6)y=1$이다. Q를 넣으면 $(5\sqrt{3}/36)x-(\sqrt{6}/18)y=1$이다.

두 번째 식을 세 배하여 첫 번째 식에 더하면 y항이 소거되어 $(\sqrt{3}/2)x=4$이다. 따라서 $x=8\sqrt{3}/3$이다.

이를 첫 번째 식에 넣으면 $2/3+(\sqrt{6}/6)y=1$이므로 $y=\sqrt{6}/3$이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{T}=(8\sqrt{3}/3,\sqrt{6}/3)$이므로 $\mathrm{OT}^2=64/3+2/3=22$이다.

30번 | 정답 493 | 4점

R1. 직각 조건을 거리식으로 바꾸어 두 높이를 정한다

조건

P, Q는 반지름 5인 구 위에 있고 $\angle\mathrm{APO}=\angle\mathrm{CQO}=\pi/2$이다. A와 C는 z축 위에 있다.

사용 과정

모르는 좌표를 $\mathrm{P}=(x_1,y_1,z_1)$, $\mathrm{Q}=(x_2,y_2,z_2)$라 두자. $\mathrm{OP}^2=\mathrm{OQ}^2=25$이다. 직각삼각형 APO에서 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{OP}^2=\mathrm{AO}^2$이다.

좌표로 $\mathrm{AP}^2=x_1^2+y_1^2+(z_1-25/3)^2$이다. 구 위 조건을 써서 $\mathrm{AP}^2=25-(50/3)z_1+625/9$로 정리한다. 여기에 $\mathrm{OP}^2=25$, $\mathrm{AO}^2=625/9$를 넣으면 $50-(50/3)z_1=0$이다.

같은 방식으로 $\mathrm{CQ}^2=25-(25/2)z_2+625/16$이고 $\mathrm{CQ}^2+25=625/16$에서 $50-(25/2)z_2=0$이다.

결과 · 다음 연결

$z_1=3$, $z_2=4$이다. 따라서 사영점 P', Q'는 각각 원점에서 거리 4, 3인 원 위에 있으며 x좌표와 y좌표가 모두 0 이상이다.

기하 30번 해설

R2. 사영된 삼각형의 변과 원점에서 밑변까지 거리를 정한다

조건

$\mathrm{OP'}=4$, $\mathrm{OQ'}=3$이고 공간 거리 $\mathrm{PQ}=\sqrt{14}$이다. 두 점의 높이 차는 1이다.

사용 과정

공간 거리의 제곱은 평면 거리의 제곱과 높이 차의 제곱의 합이므로 $(\mathrm{P'Q'})^2=14-1=13$이다.

삼각형 $\mathrm{OP'Q'}$에서 코사인법칙을 쓰면 사이각의 코사인은 $(16+9-13)/(2\times4\times3)=1/2$이다. 내각이므로 사인은 $\sqrt{3}/2$이고 넓이는 $3\sqrt{3}$이다.

직선 $\mathrm{P'Q'}$를 l, 원점에서 l까지의 거리를 d라 두자. 넓이를 밑변과 높이로 다시 쓰면 $(1/2)\sqrt{13}\,d=3\sqrt{3}$이다.

결과 · 다음 연결

$d=6\sqrt{3}/\sqrt{13}$이다. 사영된 두 점의 방향이 바뀌어도 밑변 길이와 원점에서 밑변까지의 거리는 일정하다.

R3. B에서 밑변까지 거리의 상한으로 넓이를 제한한다

조건

구하는 정사영은 삼각형 $\mathrm{BP'Q'}$이다. $\mathrm{B}=(-3,-4)$이고 $\mathrm{OB}=5$이다.

사용 과정

밑변 길이 $\sqrt{13}$이 고정되어 있으므로 넓이를 크게 하려면 B에서 직선 l까지의 높이를 크게 해야 한다. 원점에서 l에 내린 수선의 발을 N이라 두면 $\mathrm{ON}=d$이다.

B에서 l까지의 최단거리는 BN 이하이고, 삼각부등식에서 $\mathrm{BN}\le\mathrm{BO}+\mathrm{ON}=5+d$이다. 따라서 정사영 넓이는 $(\sqrt{13}/2)(5+d)$ 이하이다.

결과 · 다음 연결

넓이의 상한은 $5\sqrt{13}/2+3\sqrt{3}$이다. 이 상한을 달성하는 점들이 좌표의 부호 조건까지 만족하는지 확인해야 실제 최댓값이 된다.

기하 30번 해설

R4. 상한을 달성할 직선과 두 점을 실제로 구성한다

조건

상한을 얻으려면 $\mathrm{B}, \mathrm{O}, \mathrm{N}$이 일직선 위에 있고 O가 사이에 있어야 한다. $\mathrm{B}=(-3,-4)$의 반대 방향은 $(3,4)$이다.

사용 과정

길이 1인 법선벡터를 $\boldsymbol{n}=(3/5,4/5)$로 두면 수선의 발은 $\mathrm{N}=d\boldsymbol{n}$이다. 이 점을 지나 법선이 $\boldsymbol{n}$인 직선은 $l: 3x+4y=30\sqrt{3}/\sqrt{13}$이다. 그 직선까지의 거리는 원점에서 d, B에서 $5+d$이다.

직선 방향의 단위벡터를 $\boldsymbol{v}=(4/5,-3/5)$라 두자. $\boldsymbol{n}$과 $\boldsymbol{v}$의 내적은 0이다. 직선 위 점 $d\boldsymbol{n}+t\boldsymbol{v}$의 원점까지 거리 제곱은 d^2+t^2이다.

$d^2=108/13$이므로 반지름 4인 원과의 교점에서는 $t^2=16-108/13=100/13$, 반지름 3인 원과의 교점에서는 $t^2=9-108/13=9/13$이다. 두 점 사이 거리도 $\sqrt{13}$이 되어야 하므로 각각 $t=10/\sqrt{13}$, $t=-3/\sqrt{13}$을 택한다.

따라서 $\mathrm{P}'=d\boldsymbol{n}+(10/\sqrt{13})\boldsymbol{v}$, $\mathrm{Q}'=d\boldsymbol{n}-(3/\sqrt{13})\boldsymbol{v}$이다. P'의 두 좌표 분자는 $18\sqrt{3}+40$, $24\sqrt{3}-30$이며 공통 분모는 $5\sqrt{13}$이다. Q'의 두 좌표 분자는 $18\sqrt{3}-12$, $24\sqrt{3}+9$이고 분모는 같다. 네 값 모두 양수이다.

두 점의 원점까지 거리는 각각 4, 3이고 점 사이 거리는 $(10+3)/\sqrt{13}=\sqrt{13}$이다. 높이 3, 4를 각각 붙이면 구 위 조건과 공간 거리 $\mathrm{PQ}=\sqrt{14}$를 만족한다. R1의 직각 거리식도 다시 성립한다.

결과 · 다음 연결

좌표 범위와 모든 조건을 만족하면서 상한이 달성된다. 따라서 $\mathrm{M}=5\sqrt{13}/2+3\sqrt{3}$이다.

R5. 최댓값을 요구한 정수의 합으로 바꾼다

조건

$\mathrm{M}=5\sqrt{13}/2+3\sqrt{3}$이며 $4\mathrm{M}^2=p+q\sqrt{39}$이다.

사용 과정

$4\mathrm{M}^2=(5\sqrt{13}+6\sqrt{3})^2$를 전개하면 유리수 부분은 $25\times13+36\times3=433$, 무리수 부분은 $60\sqrt{39}$이다.

결과 · 다음 연결

$p=433$, $q=60$이므로 $p+q=493$이다.